

文章编号:1671-1637(2026)05-0139-15

## 基于旋转壳理论的波形腹板钢箱组合弯梁 剪应力分析

姚常伟,王春生\*

(长安大学 公路学院,陕西 西安 710064)

**摘要:**为精确计算波形腹板钢箱组合弯梁的竖向剪应力并量化各分项效应贡献,提出一种同时考虑波形钢腹板抗弯、初始曲率及曲率沿梁宽变化的剪应力计算方法。基于旋转壳理论,推导出包含弯曲、自由扭转、约束扭转翘曲与畸变翘曲分量的剪应力解析公式;采用能量变分法建立控制微分方程,并通过有限差分法求解;通过结构平面曲率、加载位置及截面尺寸的参数分析,探明该类弯梁剪应力分布规律与关键表征指标。研究表明:解析值与文献试验值及有限元值吻合良好;与忽略曲率影响的常规方法相比,所提方法对自由扭转剪应力和畸变翘曲剪应力的计算准确度分别提高5.0%和13.8%;梁轴平曲线半径 $R$ 与梁宽 $B$ 之比( $R/B$ )小于10时弯扭耦合效应显著,而 $R/B \geq 70$ 时可忽略,建议将10和70作为该效应显著与可忽略的关键界限值。基于所提解析公式得到的剪应力偏载系数为1.33,表明偏载效应显著,设计中需重点考虑。若忽略约束扭转与畸变效应,外腹板总剪应力计算结果虽偏于保守,但平均误差将达3.3%~9.0%,精细化分析中应计入二者影响。所建立的解析公式及获得的规律,可为波形腹板钢箱组合弯梁的设计计算提供理论参考。

**关键词:**桥梁工程;钢箱组合弯梁;旋转壳理论;剪应力解析公式;波形钢腹板;有限差分法  
**中图分类号:**U441.5 **文献标志码:**A **DOI:**10.19818/j.cnki.1671-1637.2026.268

## Analysis of shear stress for curved composite steel box girders with corrugated webs based on theory of shells of revolution

YAO Chang-wei, WANG Chun-sheng\*

(School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China)

**Abstract:** To accurately calculate the vertical shear stress of curved composite steel box girders with corrugated webs and quantify the contribution of each component effect, a calculation method of shear stress was proposed, which simultaneously considered the flexural resistance of corrugated steel webs, initial curvature, and curvature variation along the girder width. Based on the theory of shells of revolution, analytical formulas for shear stress were derived, including the components of bending, free torsion, restrained torsional warping, and distortional warping. The governing differential equations were established by the energy variational method and solved by the finite difference method. Through parametric analysis of structural horizontal curvature, loading position, and cross-sectional dimensions, the distribution laws and key characteristic

出版历程:2025-11-26 收稿,2026-01-25 修回,2026-03-20 录用

基金项目:陕西省三秦英才特殊支持计划创新团队项目;中央高校基本科研业务费专项资金项目(300102214904)

作者简介:姚常伟(1984-),男,黑龙江七台河人,工学博士研究生,E-mail:yew\_08@163.com。

\*通信作者:王春生(1972-),男,黑龙江绥化人,教授,博士生导师,工学博士,E-mail:wes2000wes@163.com。

引用格式:姚常伟,王春生.基于旋转壳理论的波形腹板钢箱组合弯梁剪应力分析[J].交通运输工程学报,2026,26(5):139-153.

**Citation:** YAO Chang-wei, WANG Chun-sheng. Analysis of shear stress for curved composite steel box girders with corrugated webs based on theory of shells of revolution[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2026, 26(5): 139-153.

indices of shear stress for this type of curved girder were clarified. The results indicate that the analytical values agree well with the experimental values in the literature and the finite element values. Compared with conventional methods ignoring the influence of curvature, the proposed method improves the calculation accuracy of free torsional shear stress and distortional warping shear stress by 5.0% and 13.8%, respectively. When the ratio of girder horizontal curve radius to girder width ( $R/B$ ) is less than 10, the bending-torsion coupling effect is significant, while it is negligible when  $R/B \geq 70$ . It is suggested that 10 and 70 be taken as the key thresholds to judge whether the bending-torsion coupling effect is significant or negligible. The eccentric load coefficient of shear stress obtained by the proposed formulas is 1.33, indicating that the eccentric load effect is significant and should be emphasized in design. If the restrained torsion and distortion effects are ignored, the calculated total shear stress of the outer web is conservative, but the average error reaches 3.3%-9.0%, indicating that the effects of both should be included in the refined analysis. The established analytical formulas and obtained laws can provide a theoretical reference for the design and calculation of curved composite steel box girders with corrugated webs.

**Keywords:** bridge engineering; curved composite steel box girder; theory of shells of revolution; analytical formula for shear stress; corrugated steel web; finite difference method

**Publication history:** Received 2025-11-26; Received in revised form 2026-01-25; Accepted 2026-03-20

**Funding:** Sanqin Yingcai Special Support Program Innovation Team Project; Fundamental Research Funds for the Central Universities (300102214904)

\* **Corresponding author:** WANG Chun-sheng, professor, PhD, E-mail: wcs2000wcs@163.com.

## 0 引言

波形钢腹板组合箱梁因自重轻、抗剪屈曲性能好、预应力效率高及造型美观等突出优势,近年来在桥梁工程中得到广泛应用<sup>[1-4]</sup>。与底板为混凝土板的传统形式相比,采用钢底板的波形钢腹板组合箱梁可进一步减轻自重并优化施工工艺。波形钢腹板组合箱梁弹性阶段的弯曲、扭转、畸变及剪切屈曲等受力性能已得到系统研究<sup>[5-6]</sup>,其中剪应力的合理解析计算是结构精细化分析的核心问题。

目前,波形钢腹板组合箱梁的剪应力解析研究多集中于直线梁,且普遍忽略腹板的纵向刚度贡献,难以反映真实受力状态。Zhou等<sup>[7]</sup>推导出变截面箱梁弹性阶段的剪应力简化公式;吴启明等<sup>[8]</sup>建立了多室截面箱梁腹板剪力流计算方程,并提出腹板剪力分配系数的计算方法;冀伟等<sup>[9]</sup>推导出双室变截面箱梁的剪应力公式;邓文琴等<sup>[10]</sup>基于乌曼斯基第二理论推导出三室悬臂箱梁的约束扭转和畸变翘曲剪应力公式。然而,受顶、底板的约束,波形腹板局部仍具有一定纵向刚度,并将显著改变截面应力分布。张元海等<sup>[11]</sup>通过引入新的广义扇性坐标分布模式,推导出考虑腹板抗弯贡献的约束扭转翘曲

应力表达式,一定程度上弥补了传统模型的缺陷,但仍局限于直线梁范畴。

针对直线梁建立的剪应力解析公式,由于未考虑曲率效应,无法反映曲线梁的弯扭耦合特征,在弯梁结构应用中存在明显局限。当前波形钢腹板组合弯箱梁的解析研究多集中于正应力与变形分析,剪应力方面的研究仍不完善。Wang等<sup>[12]</sup>采用能量变分原理推导出多室弯箱梁的控制微分方程;Zhang等<sup>[13]</sup>基于能量变分原理分析了多室弯箱梁的第一和第二畸变效应;许立言等<sup>[14]</sup>通过试验研究了双箱单室弯梁的受力特性,并给出荷载横向分布系数经验公式。但上述研究均未建立系统的剪应力解析方法。Liu等<sup>[15]</sup>对比了波形钢腹板组合弯箱梁与混凝土弯箱梁的约束扭转与畸变行为,但其剪应力计算未考虑初始曲率与曲率沿梁宽变化的影响。王春生等<sup>[16-17]</sup>基于旋转壳理论建立了波形钢腹板组合弯箱梁的弯扭耦合与畸变解析模型,考虑了初始曲率、腹板剪切变形及抗弯贡献等关键因素,计算精度显著提升,但该模型主要针对截面变形与正应力,未对剪应力开展系统的解析推导。此外,相关学者对曲线工字形梁的剪切受力行为也开展了研究<sup>[18-19]</sup>,但多依赖有限元方法,针对剪应力解析计算的研究仍较

为缺乏。

综合现有研究可见,波形腹板钢箱组合弯梁的剪应力解析理论仍不完善,并成为制约其精细化分析的核心问题。针对上述研究不足,本文建立更符合实际受力行为的剪应力解析公式,量化弯曲、自由扭转、约束扭转翘曲及畸变翘曲等分量对剪应力的贡献规律。基于旋转壳理论推导同时考虑波形钢腹板抗弯贡献、初始曲率及曲率沿梁宽变化的剪应力表达式,采用能量变分法建立控制微分方程,并通过

有限差分法进行数值求解。将所得解析公式与文献试验数据及本文有限元结果对比验证,通过参数分析获得剪应力变化规律与关键表征指标。

### 1 剪应力解析计算的关键影响因素

波形腹板钢箱组合梁由开口钢箱、混凝土板及剪力键等组成,其中开口钢箱包含波形钢腹板、钢底板、翼缘板及横隔板等。该组合梁的实桥照片与截面几何参数分别如图 1、2 所示。

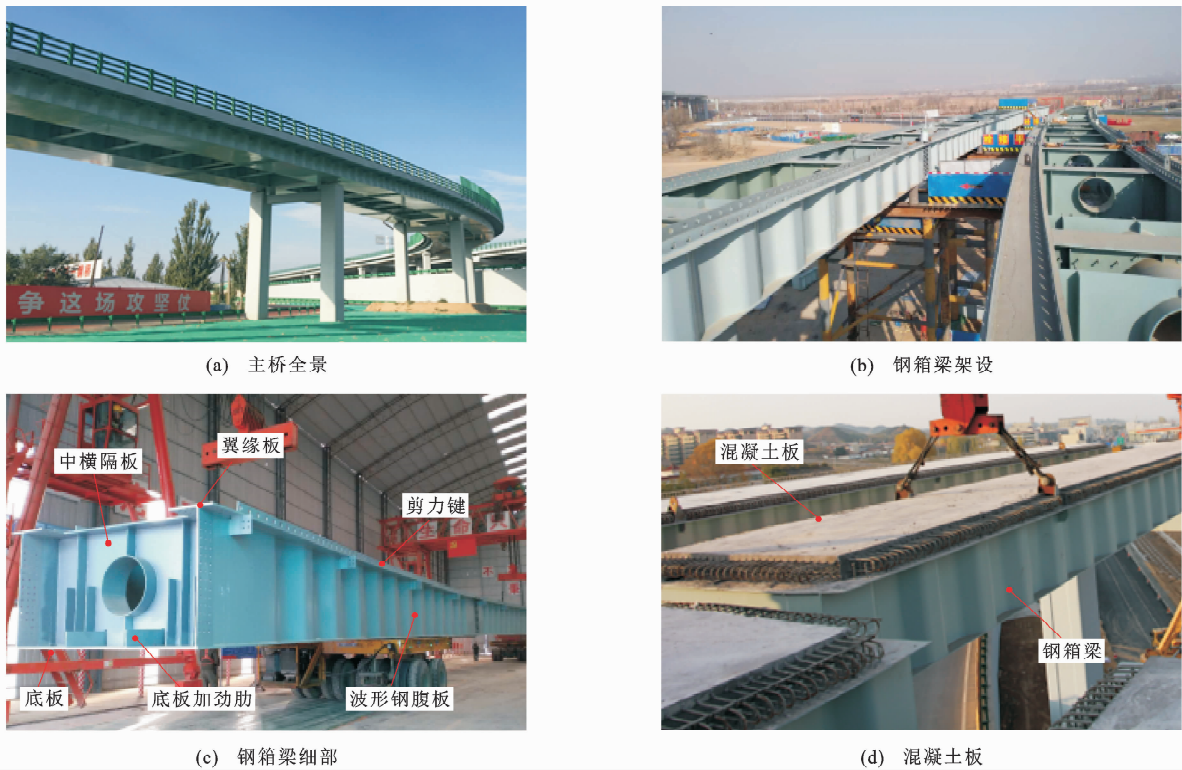


图 1 波形腹板钢箱组合梁桥

Fig. 1 Composite steel box girder bridge with corrugated webs

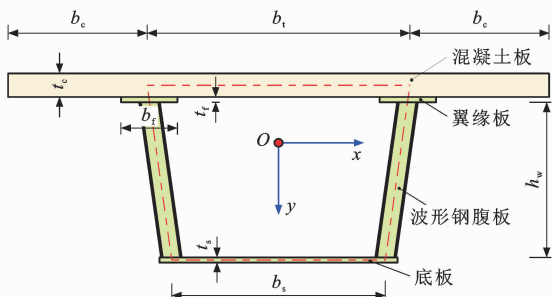


图 2 截面几何参数

Fig. 2 Geometric parameters of the cross-section

图 2 中:点  $O$  为截面形心; $b_t$ 、 $b_s$ 、 $b_c$  和  $b_f$  分别为腹板顶端中心距、腹板底端中心距、混凝土悬臂板宽度和钢箱梁单侧翼缘板宽度; $t_c$ 、 $t_s$  和  $t_f$  分别为混凝土板厚度、底板厚度和翼缘板厚度; $h_w$  为波形钢腹板高度。波形钢腹板的几何形状及参数如图 3 所

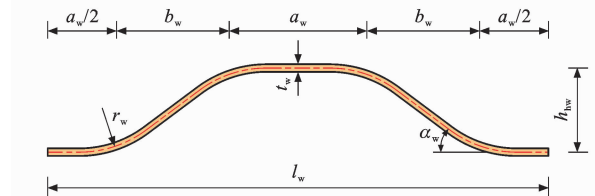


图 3 波形钢腹板几何形状及参数

Fig. 3 Geometry and parameters of corrugated steel web

示,《组合结构桥梁用波形钢腹板》(JT/T 784—2022)给出了工程中常用的 1200 型和 1600 型波形钢腹板几何参数,具体数值见表 1。

#### 1.1 腹板的抗弯贡献

根据剪力不变和剪应变相等原则,将混凝土板和波形钢腹板分别等效为平钢板,其等效厚度分别为<sup>[11]</sup>

表 1 波形钢腹板几何参数值

Table 1 Geometric parameters of corrugated steel web mm

类型	$a_w$	$b_w$	$l_w$	$h_{hw}$	$t_w$	$r_w$
1200 型	330	270	1 200	200	8~20	$15t_w$
1600 型	430	370	1 600	220	10~36	$15t_w$

$$\begin{cases} t_{cs} = (G_c/G_s)t_c \\ t_{ws} = (G_e/G_s)t_w \end{cases} \quad (1)$$

式中： $G_c$ 、 $G_s$  和  $G_e$  分别为混凝土的剪切模量、钢材的剪切模量和波形钢腹板的有效剪切模量。

$G_e$  与  $G_s$  的关系为<sup>[20]</sup>

$$G_e = \frac{a_w + b_w}{a_w + b_w \sec(\alpha_w)} G_s \quad (2)$$

式中： $a_w$ 、 $b_w$  和  $\alpha_w$  均为波形钢腹板的几何参数(图 3)。

需要说明的是,本文将波形钢腹板等效为平腹板主要为便于解析计算,其作为正交异性板的力学特性并未改变,即截面剪切刚度与扭转刚度由等效平腹板全截面贡献[按式(1)计算],而竖向弯曲与翘曲刚度仅考虑腹板顶、底部有效区域。为在传统方法基础上计入波形钢腹板的抗弯贡献,本文定义距顶板和底板中面分别为  $h_1$  和  $h_2$  的范围为截面抗弯区。根据图 2 所示几何关系,可得  $h_1 = h_{w1} + t_c/2$ ,  $h_2 = h_{w2} + t_s/2$ , 其中  $h_{w1}$ 、 $h_{w2}$  分别为腹板顶部和底部参与抗弯的高度。据此引入参数  $\delta_1 = h_{w1}/h_w$  和  $\delta_2 = h_{w2}/h_w$ , 分别表征腹板顶部和底部区域的抗弯贡献度。基于上述定义,得到波形腹板钢箱组合梁的计算图式如图 4 所示。图 4 中: $h$  为截面计算高度,取为顶板与底板中面间的距离; $s$  和  $n$  分别为箱梁各板件的切线和法线方向。截面惯性矩、扭转与畸变翘曲惯性矩等特性,均基于此计算图式确定。

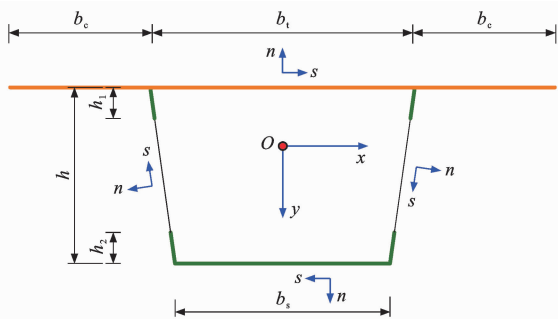


图 4 截面计算示意

Fig. 4 Schematic of cross-section calculation

### 1.2 初始曲率影响

相较于直线箱梁,曲线箱梁的剪应力分布应计入初始曲率影响。考虑到曲线薄壁箱梁与旋转壳的力学相似性,本文基于旋转壳理论建立其平衡微分方程,为剪应力的解析计算提供理论支撑。平曲线

(QS)绕其平面内的轴线(Ws)旋转形成旋转面,以该旋转面为中面的薄壳即为旋转壳<sup>[21]</sup>,其示意如图 5 所示。

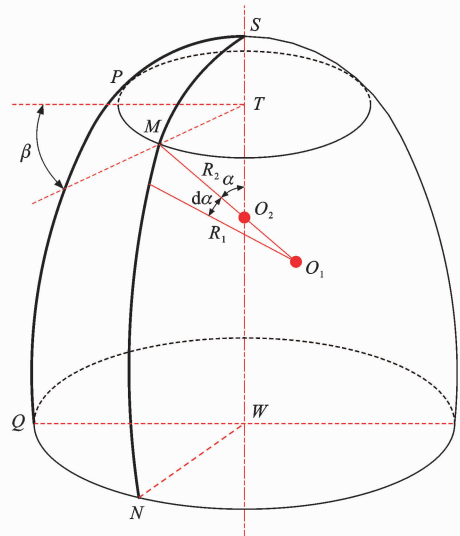


图 5 旋转壳示意

Fig. 5 Schematic of shells of revolution

平曲线旋转时的任意位置(NS)为经线,某点 P 旋转形成的圆周(PM)为纬线;经线所在平面(NSW)即为子午面。点 M 处中面法线与旋转轴的夹角为其  $\alpha$  坐标,子午面与基准子午面(QSW)的夹角为其  $\beta$  坐标。M 点在  $\alpha$ 、 $\beta$  方向的主曲率半径分别记为  $R_1$ 、 $R_2$ ,则图 5 所示旋转壳的无矩理论平衡方程为<sup>[21]</sup>

$$\frac{\partial F_{T12}}{R_1 \partial \alpha} + \frac{2 \cos(\alpha)}{R_2} F_{T12} + \frac{\partial F_{T2}}{R_2 \sin(\alpha) \partial \beta} + q_2 = 0 \quad (3)$$

式中： $F_{T2}$  为纬线方向的拉压力； $F_{T12}$  为经线及纬线方向的剪切力； $q_2$  为经线方向荷载。

曲线薄壁箱梁的顶板、底板及腹板可分别视为由其板件中心线绕平面内轴线 WS 旋转  $\beta$  角形成的旋转壳,因此该箱梁可简化为若干旋转壳组成的封闭旋转壳体(图 6)。建立以截面形心为原点、形心主轴为  $x$  轴和  $y$  轴、曲率半径切线方向为  $z$  轴的三维流动直角坐标系。对于箱壁上任意点  $M(x, y)$ ,

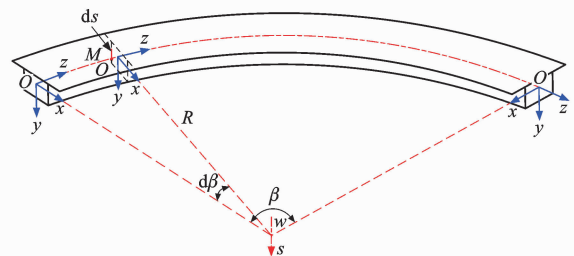


图 6 旋转壳比拟示意

Fig. 6 Schematic of the shells of revolution analogy

其平曲线半径  $r$  与梁轴平曲线半径  $R$  的关系为  $r = R - x$ , 微分可得  $dr = -dx$ 。取该点处的微段  $ds$  为分析对象(不失一般性,以曲线示意),如图 7 所示。结合图 7 的几何关系及  $dr = -dx$ , 可得

$$\begin{cases} R_1 d\alpha = ds \\ R_2 \sin(\alpha) d\beta = rd\beta = dz \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} ds \cos(\alpha) = -dx \\ dr = -dx \end{cases} \quad (5)$$

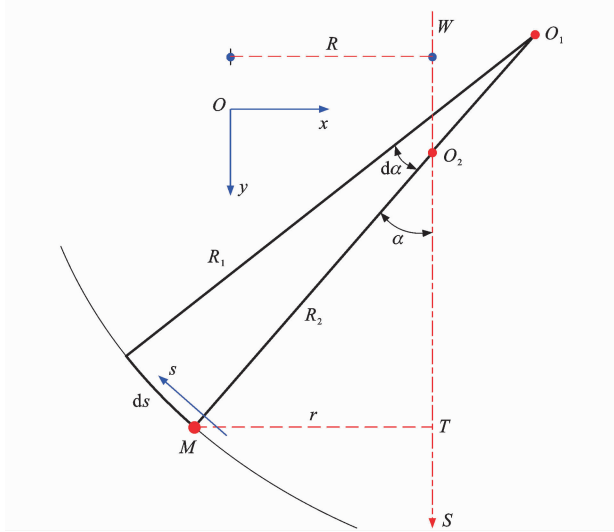


图 7 微段示意

Fig. 7 Schematic of infinitesimal segment

将式(4)代入式(3),并结合  $F_{T2} = \sigma t$  和  $F_{T12} = \tau t = q$ , 可得曲线薄壁箱梁的平衡微分方程

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} t + \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{2q}{r} \cos(\alpha) + q_2 = 0 \quad (6)$$

式中:  $\sigma$  为箱梁正应力;  $\tau$  为剪应力;  $q$  为剪力流;  $t$  为箱梁壁厚。

当无纵向荷载( $q_2 = 0$ )时,式(6)简化为

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} t + \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{2q}{r} \cos(\alpha) = 0 \quad (7)$$

由式(7)可见,曲线箱梁的平衡微分方程受平曲线半径  $r$  和法线倾角  $\alpha$  (中面法线与旋转轴夹角)影响。当  $r \rightarrow +\infty$  时,该方程退化为直线箱梁的平衡微分方程。对于直腹板箱梁,其内侧与外侧腹板的法线倾角分别为  $270^\circ$  和  $90^\circ$ , 此时  $\cos(\alpha) = 0$ , 表明初始曲率对其腹板剪应力的影响较小。

### 1.3 曲率沿梁宽的变化

对于图 6 所示的曲线薄壁箱梁,箱壁上任意点  $M(x, y)$  的曲率可表示为  $\chi(x) = 1/r = 1/(R - x)$ 。可见,曲率沿梁宽呈双曲线变化,这将导致截面正应力亦呈相应的非线性分布。当梁轴平曲线半径  $R$  远大于梁宽  $B$  (径宽比  $R/B > 10$ ) 时,曲率沿梁宽变

化对弯曲和扭转应力分布的影响较小,整个截面可采用  $\chi = 1/R$  的梁轴曲率近似。然而,当  $R/B < 10$  时(大曲率弯梁),曲率沿梁宽变化显著,其对正应力分布的影响不可忽略<sup>[22-23]</sup>。为兼顾解析计算的精确性与工程应用的简便性,本文采用曲率  $\chi(x)$  的线性修正项

$$\chi(x) \approx 1/R + x/R^2 = \chi(1 + \chi x) \quad (8)$$

## 2 剪应力解析公式推导与求解

剪应力解析公式建立采用以下基本假定:①结构材料处于线弹性阶段;②截面应力沿壁厚均匀分布;③混凝土板与底板符合平截面假定;④忽略混凝土板与钢箱梁界面间的相对滑移。

基于上述假定,并充分考虑剪应力解析计算的关键影响因素后,采用图 8 所示流程,建立波形腹板钢箱组合弯梁的剪应力解析公式。

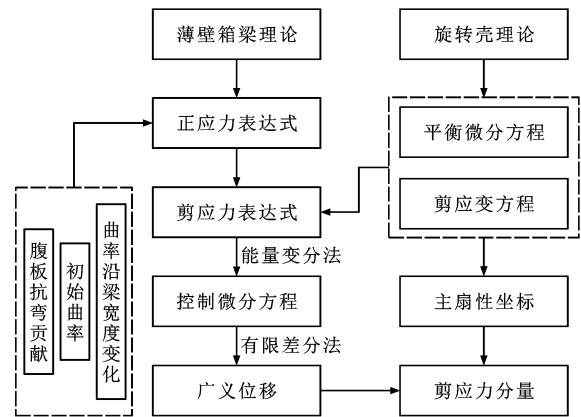


图 8 剪应力解析公式建立流程

Fig. 8 Establishment process of analytical formulas of shear stress

### 2.1 剪力流解析公式推导

#### 2.1.1 弯曲剪力流

曲线薄壁箱梁发生竖向挠曲时,由式(7)得

$$\frac{\partial q_M}{\partial s} + \frac{2q_M}{r} \cos(\alpha) = -\frac{\partial \sigma_M}{\partial z} t \quad (9)$$

式中:  $\sigma_M$  为弯曲正应力;  $q_M$  为弯曲剪力流。

考虑曲率沿梁宽变化的曲线薄壁箱梁弯曲正应力  $\sigma_M$  为<sup>[22,24]</sup>

$$\sigma_M = -(1 + \chi x) E_s y (v'' - \varphi/R) \quad (10)$$

式中:  $v$  为截面竖向位移;  $\varphi$  为截面扭转角;  $y$  为竖向坐标。

相应的弯曲应变能为

$$U_M = \frac{1}{2E_s} \int_V \sigma_M^2 dV = \frac{E_s}{2} \int_l I_x (v'' - \varphi/R)^2 dz \quad (11)$$

$$I_x = \int_A (1 + \chi x) y^2 dA$$

式中:  $I_x$  为截面对  $x$  轴的惯性矩;  $l$  为曲线梁的轴线长度;  $A$  为梁截面换算面积;  $V$  为对应于  $l$  和  $A$  的梁体体积。

将式(10)代入式(9),并结合式(5),可得该一阶非齐次线性微分方程的解为

$$q_M = \frac{E_s(v''' - \chi\varphi')}{r^2} \int_0^s (1 + \chi x) r^2 y t ds + q_{M0} \quad (12)$$

式中:  $q_{M0}$  为箱梁底板中点切口处的常剪流。

$q_{M0}$  可根据切口处的位移协调条件(即剪应变闭合积分  $\oint \gamma_s ds = \frac{1}{G_s t} \oint q_M ds = 0^{[8]}$ ) 确定。将  $q_{M0}$  代入式(12),并结合式(8),可得弯曲剪力流

$$q_M = E_s(v''' - \chi\varphi') \frac{R^2}{r^2} \bar{S}_x \quad (13)$$

$$\bar{S}_x = S_x - \frac{r^2}{R^2} \left[ \oint (1 + \chi x)^2 \frac{S_x}{t} ds \right] \left( \oint \frac{ds}{t} \right)^{-1}$$

$$S_x = \int_0^s (1 + \chi x) (1 - \chi x)^2 y t ds$$

式中:  $S_x$  为截面对  $x$  轴的静面矩。

当  $R \rightarrow +\infty$  时,式(13)退化为直箱梁的弯曲剪力流表达式,  $q_M = E_s v''' \bar{S}_x$ 。

### 2.1.2 自由扭转剪力流

箱梁自由扭转时,正应力  $\sigma = 0$ ,剪力流  $q = q_s$ ,此时式(7)可简化为

$$\frac{\partial q_s}{\partial s} + \frac{2q_s}{r} \cos(\alpha) = 0 \quad (14)$$

该方程的解为  $q_s = C/r^2$ ,其中  $C$  为积分常数。

忽略悬臂板的自由扭转剪应力,剪力流  $q_s$  对扭心的扭矩为

$$M_s = \oint q_s \rho_s ds = C \oint \frac{\rho_s}{r^2} ds \quad (15)$$

式中:  $\rho_s$  为周边微元  $ds$  的切线至扭心的距离。

给定扭矩时,积分常数为

$$C = M_s \left( \oint \frac{\rho_s}{r^2} ds \right)^{-1} \quad (16)$$

将式(16)代入式(14),可得自由扭转剪力流为

$$q_s = \frac{R^2}{r^2} \frac{M_s}{\oint (1 + \chi x)^2 \rho_s ds} \quad (17)$$

可见,受曲率影响,剪力流不再保持常量。当  $R \rightarrow +\infty$  时,式(17)退化为直箱梁的自由扭转剪力流表达式,  $q_s = M_s/\Omega$ ,其中  $\Omega = \oint \rho_s ds$ 。

### 2.1.3 约束扭转翘曲剪力流

计及曲率沿梁宽变化的约束扭转翘曲正应力可表示为

$$\sigma_\omega = -(1 + \chi x) E_s (\psi' + v''/R) \omega_R \quad (18)$$

式中:  $\psi$  为约束扭转翘曲广义位移;  $\omega_R$  为约束扭转主扇性坐标。

相应的约束扭转翘曲应变能为

$$U_\omega = \frac{1}{2E_s} \int_V \sigma_\omega^2 dV = \frac{E_s}{2} \int_l I_\omega (\psi' + v''/R)^2 dz \quad (19)$$

$$I_\omega = \int_A (1 + \chi x) \omega_R^2 dA$$

式中:  $I_\omega$  为扭转翘曲惯性矩。

将式(18)代入式(7),可得约束扭转翘曲剪力流

$$q_\omega = E_s (\psi'' + \chi v''') \frac{R^2}{r^2} \bar{S}_\omega \quad (20)$$

$$\bar{S}_\omega = S_\omega - \frac{r^2}{R^2} \left[ \oint (1 + \chi x)^2 \frac{S_\omega}{t} ds \right] \left( \oint \frac{ds}{t} \right)^{-1}$$

$$S_\omega = \int_0^s (1 + \chi x) (1 - \chi x)^2 \omega_R t ds$$

式中:  $\bar{S}_\omega$  为广义扇性静面矩;  $S_\omega$  为扇性静面矩。

当  $R \rightarrow +\infty$  时,式(20)退化为直箱梁的约束扭转剪力流表达式,  $q_\omega = E_s \psi'' \bar{S}_\omega$ 。

曲线箱梁约束扭转时,其总剪应力  $\tau_{zs}$  与总扭矩  $M_z$  的关系可表示为  $M_z = \oint \tau_{zs} \rho_s t ds$ 。化简该式,可得总扭矩  $M_z$  的表达式为<sup>[24]</sup>

$$M_z = G_s I_d (\varphi' + v'/R) - G_s (I_\rho - I_d) (\psi - \varphi') \quad (21)$$

$$I_d = \Omega^2 \left( \oint \frac{ds}{t} \right)^{-1}$$

$$I_\rho = \oint \rho_s^2 t ds$$

式中:  $I_d$  为自由扭转惯性矩;  $I_\rho$  为极惯性矩。

由此可得约束扭转剪应变能为

$$U_\tau = \frac{1}{2G_s} \int_V \tau_{zs}^2 t ds dz = \frac{1}{2} \int_l G_s I_d (\varphi' + v'/R)^2 dz + \frac{1}{2} \int_l G_s (I_\rho - I_d) (\psi - \varphi')^2 dz \quad (22)$$

### 2.1.4 畸变翘曲剪力流

计及曲率沿梁宽变化的畸变翘曲正应力为

$$\sigma_D = -(1 + \chi x) E_s \gamma_D'' \omega_{DR} \quad (23)$$

式中:  $\gamma_D$  为畸变角;  $\omega_{DR}$  为畸变主扇性坐标。

曲线薄壁箱梁的畸变总应变能由翘曲应变能、框架畸变应变能及畸变-弯矩耦联应变能 3 部分组成<sup>[16,25]</sup>,即

$$U_D = \frac{E_s}{2} \int_l I_{\omega D} \gamma_D''^2 dz + \frac{E_s}{2} \int_l I_R \gamma_D^2 dz + \int_l \eta \frac{M_x}{R} \gamma_D dz \quad (24)$$

$$I_{\omega D} = \int_A (1 + \chi x) \omega_{DR}^2 dA$$

式中:  $I_{\omega D}$  为畸变翘曲惯性矩;  $I_R$  为畸变框架惯性矩;

$\eta$  为梯形截面的弯矩-畸变关联系数,对于矩形截面, $\eta=1/2$ ;  $M_x$  为截面绕  $x$  轴的弯矩。

将式(23)代入式(7),可得畸变翘曲剪力流为

$$q_D = E_s \gamma_D'' \frac{R^2}{r^2} \bar{S}_{\omega D} \quad (25)$$

$$\bar{S}_{\omega D} = S_{\omega D} - \frac{r^2}{R^2} \left[ \oint (1 + \chi x)^2 \frac{S_{\omega D}}{t} ds \right] \left( \oint \frac{ds}{t} \right)^{-1}$$

$$S_{\omega D} = \int_0^s (1 + \chi x) (1 - \chi x)^2 \omega_{DR} t ds$$

式中: $\bar{S}_{\omega D}$  为畸变广义扇性静面矩; $S_{\omega D}$  为畸变扇性静面矩。

### 2.1.5 总剪力流

截面总剪力流  $q$  由弯曲剪力流  $q_M$ 、自由扭转剪力流  $q_s$ 、约束扭转翘曲剪力流  $q_\omega$  及畸变翘曲剪力流  $q_D$  叠加而成,即

$$q = q_M + q_s + q_\omega + q_D \quad (26)$$

基于剪应力沿壁厚均匀分布的假设,剪应力可由剪力流除以壁厚得到。需要说明的是,本文推导的剪力流公式(13)、(17)、(20)和(25)在形式上同样适用于传统波形钢腹板组合箱梁,只需将混凝土底板按式(1)等效为钢板。

## 2.2 控制微分方程建立

当曲线薄壁箱梁沿梁轴作用分布荷载  $q_y$ 、分布扭矩  $m_z$  及分布畸变矩  $m_D$  时,外荷载势能为<sup>[26]</sup>

$$V = - \int_l q_y v dz - \int_l m_z \varphi dz - \int_l m_D \gamma_D dz \quad (27)$$

联立式(11)、(19)、(22)、(24)和(27),可得曲线薄壁箱梁的总势能为

$$\begin{aligned} \Pi = U_M + U_\omega + U_\tau + U_D + V = & \frac{E_s}{2} \int_l I_x (v'' - \varphi/R)^2 dz + \\ & \frac{E_s}{2} \int_l I_\omega (\varphi' + v'/R)^2 dz + \frac{G_s}{2} \int_l I_d (\varphi' + v'/R)^2 dz + \\ & \frac{G_s}{2} \int_l (I_\rho - I_d) (\psi - \varphi')^2 dz + \frac{E_s}{2} \int_l I_{\omega D} \gamma_D''^2 dz + \\ & \frac{E_s}{2} \int_l I_R \gamma_D^2 dz + \int_l \eta \frac{M_x}{R} \gamma_D dz - \int_l (q_y v + m_z \varphi + \\ & m_D \gamma_D) dz \end{aligned} \quad (28)$$

根据最小势能原理,结构处于平衡状态时总势能一阶变分为 0( $\delta \Pi = 0$ )<sup>[27-28]</sup>,由此可得控制微分方程为

$$(E_s I_x + E_s I_\omega / R^2) v'''' - (G_s I_d / R^2) v'' + (E_s I_\omega / R) \varphi'' - [(E_s I_x + G_s I_d) / R] \varphi'' - q_y = 0 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} [(E_s I_x + G_s I_d) / R] v'' + G_s I_\rho \varphi'' - (E_s I_x / R^2) \varphi - \\ G_s (I_\rho - I_d) \psi' + m_z = 0 \quad (30) \\ - (E_s I_\omega / R) v'' - G_s (I_\rho - I_d) \varphi' - E_s I_\omega \psi'' + \end{aligned}$$

$$G_s (I_\rho - I_d) \psi = 0 \quad (31)$$

$$E_s I_{\omega D} \gamma_D'' + E_s I_R \gamma_D = - \eta \frac{M_x}{R} + m_D \quad (32)$$

## 2.3 有限差分数值求解

控制微分方程(29)~(32)可采用多种数值方法求解,鉴于方程式(29)~(31)相互耦联,且方程式(32)的非齐次项为  $z$  的函数,本文采用有限差分法将其离散为代数方程组。该方法物理概念清晰、求解简便。本文重点讨论耦联方程式(29)~(31)的求解。将曲线薄壁箱梁离散为  $N$  个单元,单元长度为  $\lambda$ ,共得到  $N+1$  个结点。在结点  $n(n=1,2,\dots,N,N+1)$  处,竖向位移  $v$  的各阶差分表达式为<sup>[16-17]</sup>

$$\begin{cases} v_n'''' = (v_{n+2} - 4v_{n+1} + 6v_n - 4v_{n-1} + v_{n-2}) / \lambda^4 \\ v_n''' = (v_{n+2} - 2v_{n+1} + 2v_{n-1} - v_{n-2}) / (2\lambda^3) \\ v_n'' = (v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}) / \lambda^2 \\ v_n' = (v_{n+1} - v_{n-1}) / (2\lambda) \end{cases} \quad (33)$$

扭转角  $\varphi$  与约束扭转翘曲广义位移  $\psi$  的各阶差分表达式同理可得。将差分表达式代入方程式(29)~(31)后,每个中间结点可建立 3 个独立方程,共得到  $3N-3$  个方程。由于差分方程组包含  $3N+5$  个未知数 [ $v_n (n=0 \sim N+2)$ ,  $\varphi_n, \psi_n (n=1 \sim N+1)$ ,其中结点 0 和  $N+2$  为虚结点],因此还需引入 8 个梁端边界条件。当左端结点( $n=1$ )为固定铰支座时,有  $v_1 = \varphi_1 = M_{x1} = B_\omega = 0$ ,其中  $M_{x1}$ 、 $B_\omega$  分别为该结点的弯矩和约束扭转双力矩;右端结点对应的 4 个边界条件同理可得。对于集中荷载,可基于圣维南原理将其等效为作用在相邻差分单元上的分布荷载。联立所有差分方程,求解得到各结点的广义位移后,将其相应差分代入剪力流表达式,即可得到剪力流。方程式(32)的求解需引入 4 个梁端边界条件:对于刚性固定端或梁端设置面内、面外均无限刚性横隔板的情况,取  $\gamma_D = \gamma_D' = 0$ ;对于设置跨内横隔板的截面,假定  $\gamma_D = 0$ 。

## 3 解析公式验证

### 3.1 解析公式与文献试验结果的对比分析

选取文献[29]中的波形钢腹板简支组合弯箱梁进行验证。该试验梁全长 6.6 m,计算跨径 6.4 m,梁轴平曲线半径  $R=8.0$  m。梁端设置 250 mm 厚混凝土横隔板,跨内设置 3 道 8 mm 厚钢横隔板。钢材与混凝土的弹性模量分别为  $2.06 \times 10^5$  MPa 和  $3.55 \times 10^4$  MPa,泊松比分别为 0.3 和 0.2。试验梁示意图如图 9 所示,剪应变测点布置如图 10 所

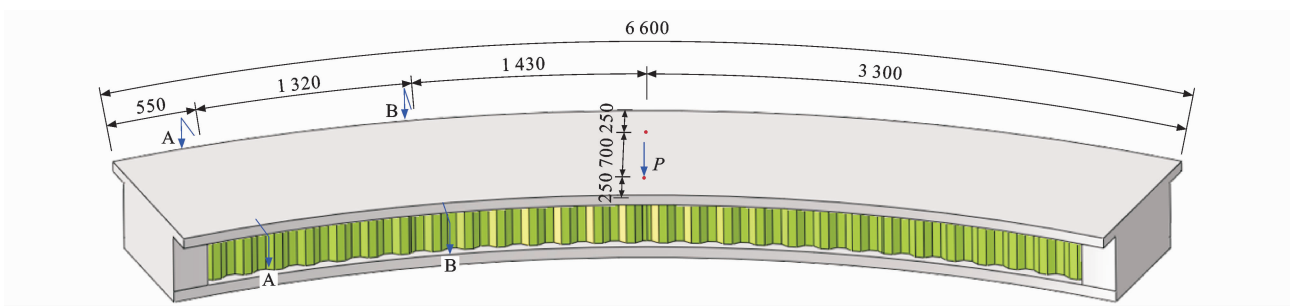


图9 试验梁三维示意(内偏载,单位:mm)

Fig. 9 Three-dimensional schematic of test girder (under inner eccentric loading, unit: mm)

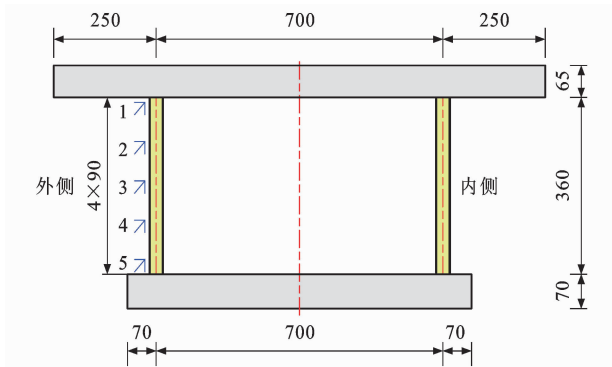


图10 剪应变测点布置(单位:mm)

Fig. 10 Layout of shear strain gauges (unit: mm)

示。波形钢腹板厚 2 mm,内、外腹板几何参数  $a_w$ 、 $b_w$  和  $h_{hw}$  的平均值分别为 60、50、33 mm。

试验梁采用单点加载,竖向荷载  $P = 50$  kN。荷载横向布置分为曲线外侧偏载、曲线内侧偏载和中心加载 3 种工况。偏载工况下,荷载作用于腹板中线;中心加载时,荷载作用于截面中线。鉴于波形钢腹板的抗弯贡献尚缺乏系统研究,本文采用有限元法分析了腹板正应力分布规律。结果表明,腹板顶部与底部区域的抗弯贡献度分别为  $\delta_1 = 0.13 \sim 0.16$ 、 $\delta_2 = 0.18 \sim 0.24$ ,与文献[30]的试验结果( $\delta_1 = \delta_2 \approx 0.14$ )吻合良好。据此,后续解析计算中:传统波形钢腹板组合箱梁保守取  $\delta_1 = \delta_2 = 0.13$ ,波形腹板钢箱组合梁保守取  $\delta_1 = 0.13$ 、 $\delta_2 = 0.18$ 。截面 A-A、截面 B-B 的剪应力解析值与试验值对比分别见表 2、3。

表 2 不同加载工况下截面 A-A 剪应力对比

Table 2 Shear stress comparison for section A-A under different loading conditions

测点	外偏载			内偏载			中心加载		
	试验值/MPa	解析值/MPa	相对差值/%	试验值/MPa	解析值/MPa	相对差值/%	试验值/MPa	解析值/MPa	相对差值/%
1	36.8	35.5	-3.5	20.6	20.0	-2.9	29.7	27.7	-6.7
2	33.7	35.7	5.9	18.7	20.2	8.0	26.2	27.9	6.5
3	33.7	35.7	5.9	18.7	20.2	8.0	26.5	27.9	5.3
4	32.4	35.7	10.2	18.8	20.2	7.4	26.3	27.9	6.1
5	32.3	35.5	9.9	19.1	20.0	4.7	26.7	27.7	3.7

表 3 不同加载工况下截面 B-B 剪应力对比

Table 3 Shear stress comparison for section B-B under different loading conditions

测点	外偏载			内偏载			中心加载		
	试验值/MPa	解析值/MPa	相对差值/%	试验值/MPa	解析值/MPa	相对差值/%	试验值/MPa	解析值/MPa	相对差值/%
1	—	30.7	—	—	15.8	—	20.9	23.3	11.5
2	31.2	30.8	-1.3	16.1	15.9	-1.2	23.4	23.4	0.0
3	29.7	30.9	4.0	15.7	16.0	1.9	23.3	23.4	0.4
4	27.8	30.9	11.2	14.6	16.0	9.6	23.2	23.4	0.9
5	27.5	31.0	12.7	14.4	16.1	11.8	21.9	23.6	7.8

注:“—”表示数据缺失。

由表 2、3 可知,在外偏载、内偏载及中心加载工况下,截面 A-A 的剪应力解析值与试验值的平均差

值分别为 6.5%、5.9% 和 5.5%,截面 B-B 对应平均差值分别为 6.5%、5.4% 和 3.7%。结果表明,本文

建立的解析公式计算精度较高,可适用于传统波形钢腹板组合箱梁的剪应力计算。

为对比本文方法(计及初始曲率及曲率沿梁宽变化)与常规方法(忽略上述因素)的差异,表 4、5 分别给出了中心加载工况下截面 A-A、截面 B-B 的剪应力计算结果。

表 4 截面 A-A 剪应力对比

Table 4 Shear stress comparison for Section A-A MPa

测点	总剪应力			弯曲剪应力		自由扭转剪应力	
	常规方法	本文方法	试验	常规方法	本文方法	常规方法	本文方法
1	28.6	27.7	29.7	15.2	15.3	13.6	12.5
2	28.8	27.9	26.2	15.4	15.5	13.6	12.5
3	28.8	27.9	26.5	15.4	15.5	13.6	12.5
4	28.8	27.9	26.3	15.4	15.5	13.6	12.5
5	28.6	27.7	26.7	15.1	15.3	13.6	12.5

表 5 截面 B-B 剪应力对比

Table 5 Shear stress comparison for Section B-B MPa

测点	总剪应力			弯曲剪应力		自由扭转剪应力	
	常规方法	本文方法	试验	常规方法	本文方法	常规方法	本文方法
1	23.3	23.3	20.9	14.9	15.0	9.6	8.8
2	23.4	23.4	23.4	15.1	15.2	9.6	8.8
3	23.4	23.4	23.3	15.1	15.2	9.6	8.8
4	23.4	23.4	23.2	15.1	15.2	9.6	8.8
5	23.6	23.6	21.9	14.8	14.9	9.6	8.8

由表 4、5 可知,以试验结果为基准,本文方法对截面 A-A 总剪应力的计算准确度较常规方法提高了 3.3%。截面 B-B 总剪应力及两截面的弯曲剪应力在 2 种方法下计算结果基本一致,说明曲率对其影响较小。但对于自由扭转剪应力,常规方法计算结果较本文方法偏高 9.0%,表明在大曲率弯箱梁中,曲率对自由扭转剪应力的影响更为显著。

对试验梁建立精细化有限元模型,具体建模方法详见第 3.2 节。各工况下控制截面挠度的有限元值与试验值的对比见表 6,截面 A-A、B-B 外腹板剪应力的对比见图 11。由对比结果可见:挠度的有限元值与试验值的平均相对差值为 1.0%;截面 A-A、B-B 外腹板剪应力的平均相对差值分别为 0.1% 和 0.2%。表明有限元结果与试验结果总体吻合良好,验证了有限元建模方法的合理性。本文后续即采用该建模方法对解析公式进行验证。

由图 11 还可看出:受褶皱效应影响,波形钢腹板大部分区域的剪应力近似呈均匀分布;但靠近截面顶、底板的区域,由于受顶底板约束作用,腹板剪应力呈折线分布,且腹板顶端剪应力约为中部均匀

表 6 控制截面挠度对比

Table 6 Comparison of deflections at control sections

加载工况	挠度	控制截面		
		L/4	L/2	3L/4
外偏载	试验值/mm	2.0	3.1	2.0
	有限元值/mm	1.8	2.8	1.8
	相对差值/%	-5.7	-8.9	-9.2
中心加载	试验值/mm	1.6	2.7	1.7
	有限元值/mm	1.6	2.5	1.6
	相对差值/%	-0.1	-5.3	-4.9
内偏载	试验值/mm	1.3	2.1	1.3
	有限元值/mm	1.4	2.2	1.4
	相对差值/%	9.7	4.1	11.2

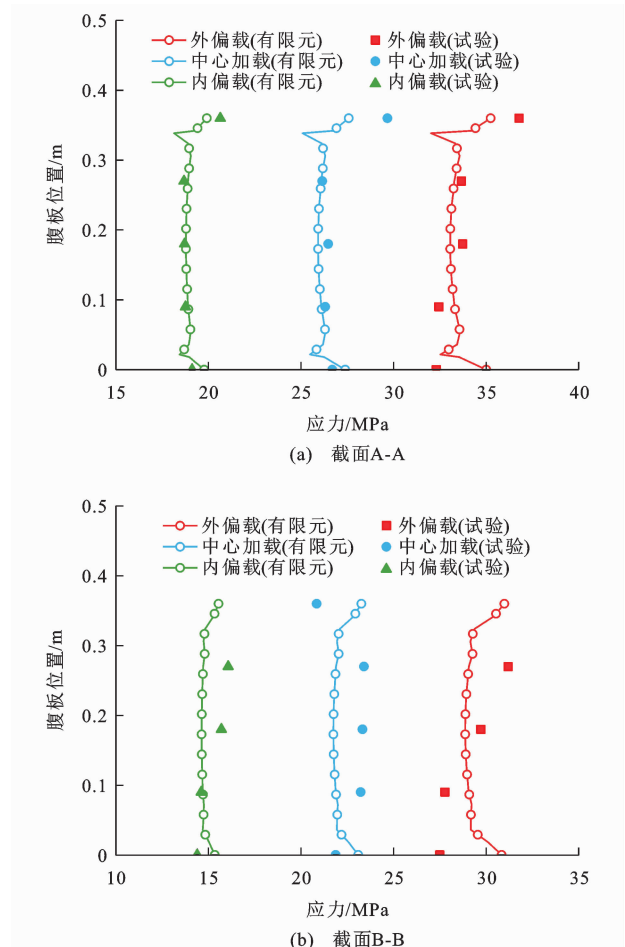


图 11 外腹板剪应力分布对比

Fig. 11 Comparison of shear stress distributions in outer webs 应力的 1.1 倍。因此,若采用全截面剪应力均匀分布假设,计算结果将偏于不安全。

### 3.2 解析公式与有限元模型的对比分析

本节用于对比验证的波形腹板钢箱组合弯梁,标准跨径为 40 m,计算跨径为 38.94 m,端横隔板采用 880 mm 厚混凝土板,跨内横隔板采用 14 mm

厚钢板,材料特性同第 3.1 节。截面参数  $b_t$ 、 $b_s$ 、 $b_c$ 、 $b_f$  分别为 2.75、2.75、1.50、0.60 m,  $t_c$ 、 $t_s$ 、 $h_w$ 、 $t_f$  分别为 250、28、1 494、28 mm。波形钢腹板采用 1200 型,厚度为 18 mm。弯梁承受满跨竖向均布荷载 ( $10.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ )与跨中竖向集中荷载(405.5 kN),横向布置同第 3.1 节。

建立如图 12 所示的精细化有限元模型,其中混凝土板与端横隔板采用 8 节点实体减缩积分单元模拟,钢梁采用 4 节点减缩积分壳单元模拟。边界条件按简支考虑,左端约束  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向线位移( $u$ 、 $v$ 、 $w$ )及绕  $y$ 、 $z$  轴转角( $\theta_y$ 、 $\theta_z$ ),右端约束线位移( $u$ 、 $v$ )及转角( $\theta_y$ 、 $\theta_z$ )<sup>[31-32]</sup>。坐标系与图 6 一致。为兼顾计算精度与效率,经网格敏感性分析确定,混凝土板

网格尺寸采用 80 mm,钢梁网格尺寸采用 120 mm,波形钢腹板折线等复杂区域加密至 60 mm。保持梁宽  $B$  不变,改变梁轴平曲线半径  $R$ ;当径宽比  $R/B=10$  且设置 7 道跨内横隔板时,模型共含  $1.15 \times 10^5$  个实体单元、 $5.7 \times 10^4$  个壳单元及  $1.72 \times 10^5$  个节点。

为分析有限差分步长  $\lambda$  对计算结果的影响,将其分别取为计算跨径  $L$  的  $1/40$ 、 $1/80$ 、 $1/160$  和  $1/320$ 。针对径宽比  $R/B=10$ 、设置 7 道跨内横隔板(间距 5 m)的算例,分析表明:各剪应力分量在  $\lambda=L/80$  与  $\lambda=L/320$  时的相对差值均小于 3.0%,已达到良好收敛。因此,本文取  $\lambda=L/80$  进行解析计算。该算例中心加载工况下,解析公式与有限元模型计算的  $L/4$  截面剪应力分布对比如图 13 所示。

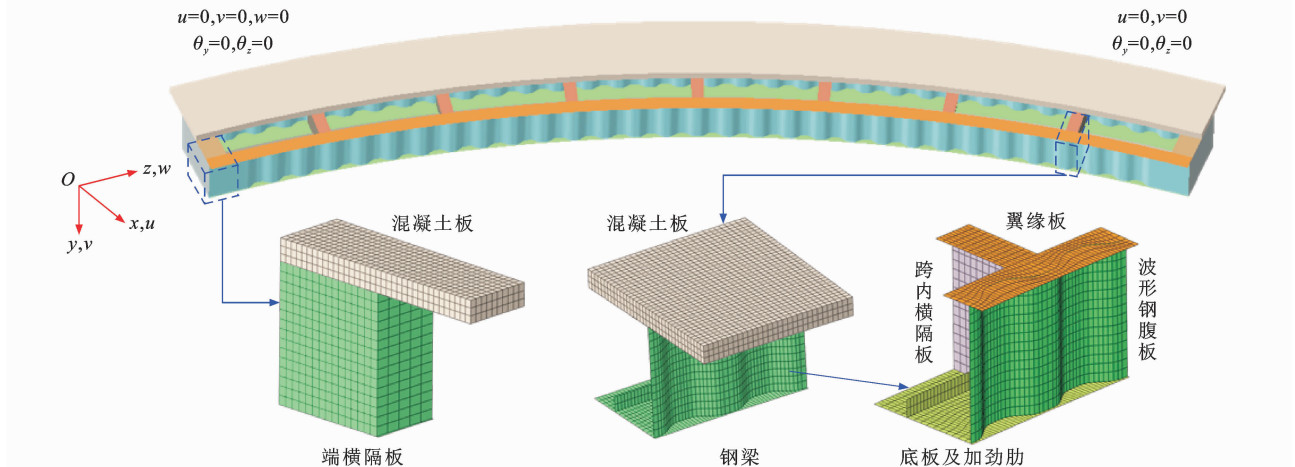


图 12 有限元模型

Fig. 12 Finite element model

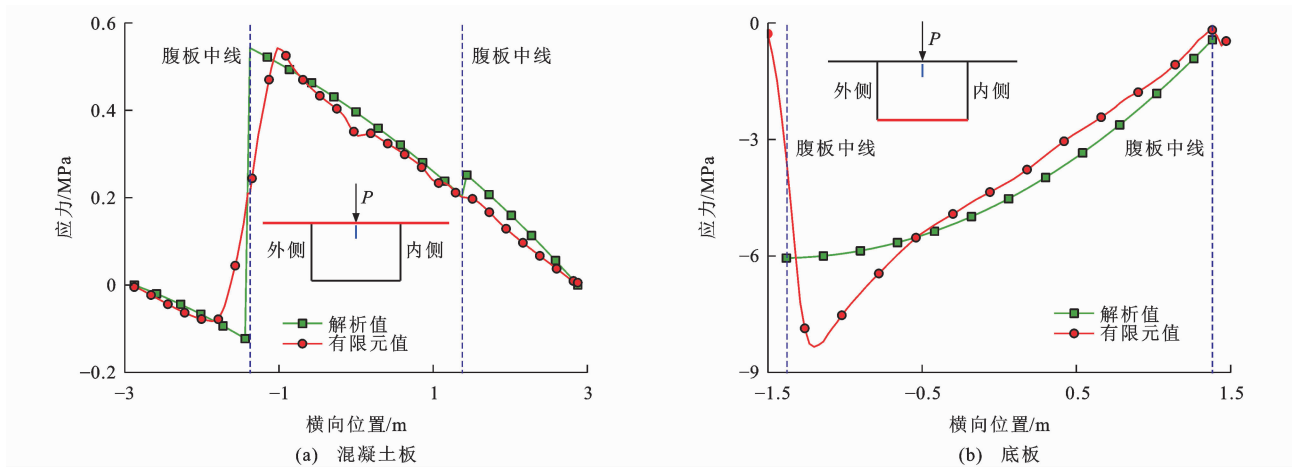


图 13 剪应力分布对比

Fig. 13 Comparison of shear stress distributions

由图 13 可见,混凝土板与底板剪应力的解析值和有限元值平均差值分别为 12.6% 和 12.0%,二者整体吻合良好。需要说明的是,底板邻近腹板区域存在剪应力集中,致使解析与有限元结果偏差较大。

该应力集中由腹板波折效应引起,其力学机理不同于剪力滞效应,有待进一步研究。

中心加载工况下,  $L/4$  截面外腹板与内腹板的剪应力解析值与有限元值对比分别见表 7、8。

表 7 外腹板剪应力对比

Table 7 Shear stress comparison for outer web

腹板位置/m	解析值/MPa					有限元值/MPa	相对差值/%
	弯曲	自由扭转	约束扭转	畸变	总应力		
1.5	-5.2	-4.7	0.01	0.5	-9.3	-8.7	6.9
1.3	-5.3	-4.7	0.01	0.6	-9.4	-9.1	3.3
0.8	-5.3	-4.7	0.01	0.6	-9.4	-9.4	0.0
0.2	-5.2	-4.7	0.01	0.5	-9.4	-9.4	0.0
0.1	-5.0	-4.7	0.01	0.3	-9.4	-8.4	11.9

注:相对差值为总应力值与有限元值的相对差值。

表 8 内腹板剪应力对比

Table 8 Shear stress comparison for inner web

腹板位置/m	解析值/MPa					有限元值/MPa
	弯曲	自由扭转	约束扭转	畸变	总应力	
1.5	5.3	-5.2	0.01	0.7	0.8	1.3
1.3	5.4	-5.2	0.01	0.7	0.9	0.6
0.8	5.4	-5.2	0.01	0.7	0.9	0.1
0.2	5.3	-5.2	0.01	0.7	0.9	1.3

由表 7、8 可知:外腹板剪应力解析值与有限元值的平均差值为 4.3%,整体吻合良好;内腹板偏差相对较大,但分布趋势基本一致。剪应力主要由弯曲剪应力与自由扭转剪应力组成,约束扭转剪应力占比最低,与文献[33]结论一致。内腹板各应力分量均高于外腹板,其中自由扭转剪应力与畸变翘曲剪应力分别高出 10.2%与 30.4%,表明曲率沿梁宽变化对大曲率弯箱梁剪应力分布的影响不可忽略。当  $R/B=10$  时,内腹板自由扭转剪应力达到弯曲剪应力的 96.3%,二者近乎相互抵消,致使内腹板总剪应力趋近于 0。值得注意的是,外腹板的约束扭转及畸变剪应力与弯曲剪应力符号相反,而内腹板三者符号相同。因此,若忽略约束扭转与畸变效应,外腹板总剪应力计算值将偏大,内腹板则偏小。虽然外腹板计算结果偏于保守,但会产生约 5.4%的平均误差,表明计及二者耦合效应是必要的。此外,若不考虑波形钢腹板的抗弯贡献,外腹板剪应力亦会产生约 2.2%的偏差。尽管该影响相对较小,但计入腹板抗弯贡献可进一步提高解析结果与实际受力状态的吻合程度。

### 4 参数影响分析

针对第 3.2 节的波形腹板钢箱组合弯梁,分析平面曲率、横向加载位置及截面几何参数等对其剪应力变化规律的影响。

#### 4.1 平面曲率影响

保持截面尺寸不变,改变梁轴平曲线半径  $R$ ,使

$R/B=5、10、15$  及  $+\infty$ (直梁),中心加载工况下外腹板高度中点处总剪应力随  $R/B$  的变化规律如图 14 所示。其中当  $R/B$  分别为 15、10 和 5 时, $L/4$  截面自由扭转剪应力与弯曲剪应力的比值依次为 55.4%、81.9%、156.8%,畸变翘曲剪应力与弯曲剪应力的比值分别为 7.0%、9.7%、14.3%。表明当  $R/B<10$  时,弯扭耦合效应显著增强。

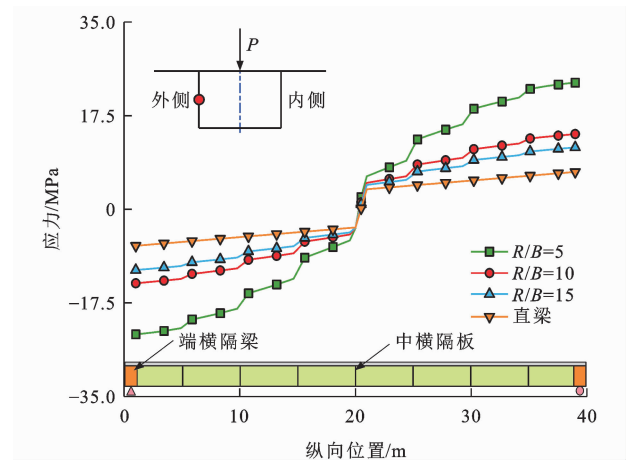


图 14 总剪应力随径宽比的变化曲线

Fig. 14 Variation of total shear stress with radius-to-width ratio

#### 4.2 横向加载位置影响

当  $R/B=10$  时,外偏载与内偏载工况下  $L/4$  截面外腹板剪应力的解析值与有限元值对比分别见表 9、10。

表 9 外偏载工况下剪应力对比

Table 9 Comparison of shear stresses under outer eccentric loading

腹板位置/m	解析值/MPa					有限元值/MPa	相对误差/%
	弯曲	自由扭转	约束扭转	畸变	总应力		
1.5	-5.3	-7.2	0.01	0.4	-12.0	-11.7	2.6
1.3	-5.4	-7.2	0.01	0.4	-12.1	-12.2	-0.8
0.8	-5.4	-7.2	0.01	0.4	-12.1	-12.6	-4.0
0.2	-5.4	-7.2	0.01	0.4	-12.1	-12.5	-3.2
0.1	-5.1	-7.2	0.01	0.2	-12.1	-11.5	5.2

表 10 内偏载工况下剪应力对比

Table 10 Comparison of shear stresses under inner eccentric loading

腹板位置/m	解析值/MPa					有限元值/MPa	相对误差/%
	弯曲	自由扭转	约束扭转	畸变	总应力		
1.5	-5.0	-2.3	0.01	0.7	-6.6	-6.2	6.5
1.3	-5.1	-2.3	0.01	0.7	-6.7	-6.6	1.5
0.8	-5.2	-2.3	0.01	0.7	-6.7	-6.8	-1.5
0.2	-5.1	-2.3	0.01	0.6	-6.7	-6.8	-1.5
0.1	-4.9	-2.3	0.01	0.4	-6.8	-5.6	21.4

由表 9、10 可知,内偏载工况下自由扭转剪应力(绝对值,下文同)较外偏载工况低 68.5%,而畸变翘曲剪应力高 54.5%,表明弯扭耦合效应有所减弱,但畸变效应增强。内偏载时,畸变翘曲剪应力达到弯曲剪应力的 13.2%,说明虽然横隔板间距仅为 5 m,但畸变效应仍不可忽略。以外腹板高度中点处外偏载与中心加载工况的剪应力比值作为偏载效应评价指标,得到  $L/4$  截面偏载系数为 1.33,该值较《公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范》(JTJ 3362—2018)推荐值(1.15)高 15.6%。文献[3]通过试验建议  $L/4$  截面腹板剪应力偏载系数不小于 1.43,本文计算结果与其吻合良好,表明直接套用混凝土箱梁偏载系数将偏于不安全。与中心加载工况类似,外偏载与内偏载工况下若忽略约束扭转与畸变效应,外腹板总剪应力均会偏大。尽管计算结果偏于保守,但仍会分别产生约 3.3%和 9.0%的平均误差。

### 4.3 截面几何参数影响

#### 4.3.1 腹板倾角

保持梁高不变,将腹板底端中心距  $b_s$  从 2.750 m 减小至 1.375 m,腹板倾角  $\theta$  相应从  $0^\circ$  增大至  $22.5^\circ$ 。中心加载工况下,外腹板高度中点处总剪应力随腹板倾角  $\theta$  的变化规律如图 15 所示。由图 15 可见,当  $\theta$  增至  $22.5^\circ$  时,支点截面总剪应力增大 20.1%,其中弯曲剪应力、自由扭转剪应力及畸变翘曲剪应力的增幅分别为 5.9%、34.9%和 8.4%,表明自由扭转剪应力对腹板倾角变化最为敏感。

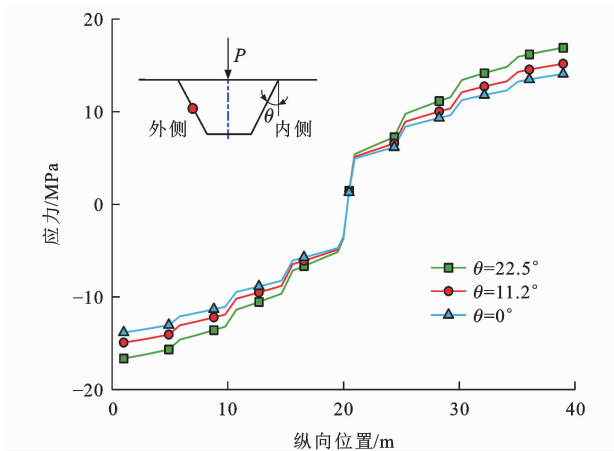


图 15 总剪应力随腹板倾角的变化曲线

Fig. 15 Variation of total shear stress with web inclination angle

中心加载工况下,本文方法与常规方法得到的  $L/4$  截面腹板自由扭转剪应力与畸变翘曲剪应力分布分别如图 16、17 所示。可见,常规方法无法反映剪应力沿梁宽的变化。对于直腹板箱梁,常规方法计算的自由扭转剪应力与畸变翘曲剪应力较本文方法分

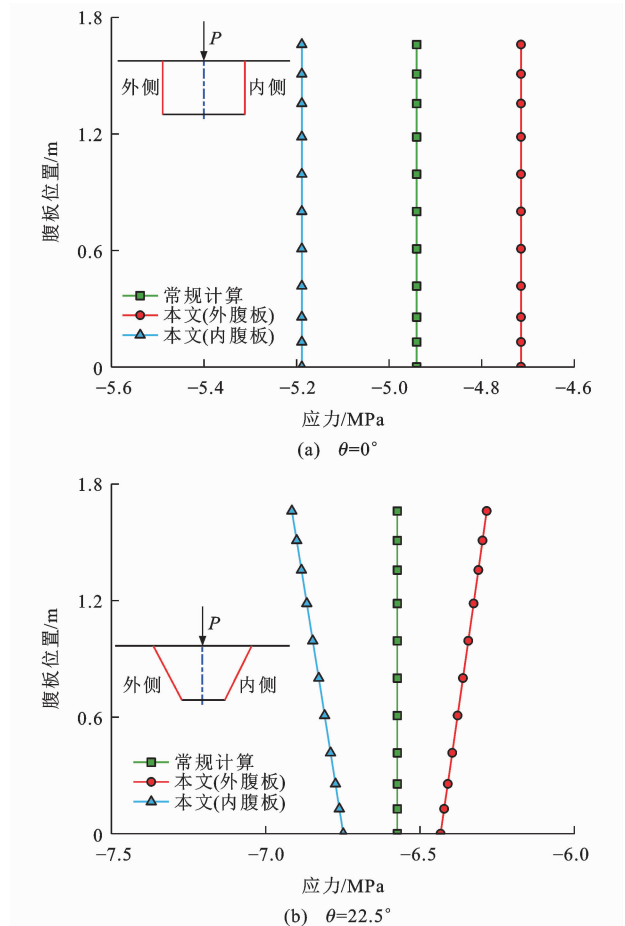


图 16 自由扭转剪应力分布

Fig. 16 Distribution of shear stress due to free torsion

别低 5.0%和 13.8%;对于斜腹板箱梁,则分别低 5.2%和 27.5%。表明在大曲率弯箱梁中,曲率对剪应力的影响显著,与第 3.1 节所得结论一致。且由式(7)可知,斜腹板剪应力受曲率影响更为显著。

#### 4.3.2 截面高度

中心加载工况下,外腹板高度中点处总剪应力随截面计算高度  $h$ (定义见图 4)的变化规律如图 18 所示。当  $h$  由 1.2 m 增至 2.1 m 时,支点截面总剪应力减小 42.2%,其中弯曲剪应力、自由扭转剪应力及畸变翘曲剪应力的降幅分别为 41.3%、43.1%、57.0%,表明畸变翘曲剪应力对截面高度变化最为敏感。

#### 4.3.3 腹板厚度

将腹板厚度以 2 mm 为步长,由 8 mm 增至 28 mm。中心加载工况下, $L/4$  截面外腹板高度中点处剪应力随腹板厚度的变化规律如图 19 所示。可见,随腹板厚度增加,总剪应力及各分量均逐渐减小并趋于平缓。总剪应力降低 72.0%,其中弯曲剪应力、自由扭转剪应力和畸变翘曲剪应力的降幅分别为 70.3%、71.3%和 26.9%,表明畸变翘曲剪应力

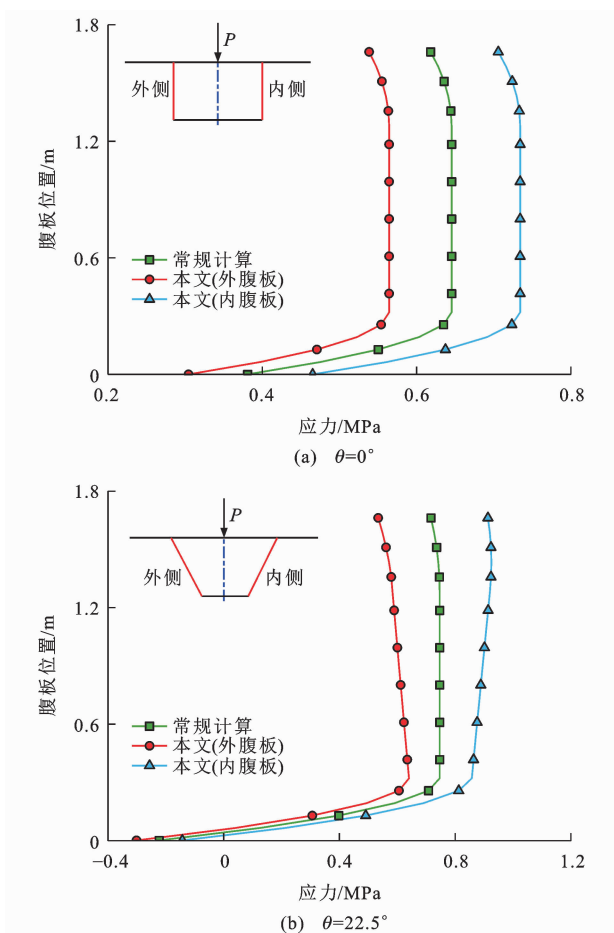


图 17 畸变翘曲剪应力分布

Fig. 17 Distribution of shear stress due to distortional warping

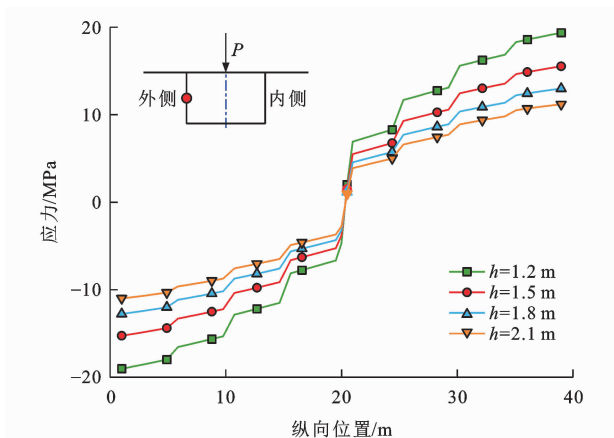


图 18 总剪应力随截面高度的变化曲线

Fig. 18 Variation curves of total shear stress with section height 对厚度变化的敏感性最低。同时,自由扭转剪应力与弯曲剪应力的比值由 0.91 降至 0.88,而畸变翘曲剪应力与弯曲剪应力的比值由 0.06 升至 0.14。这表明,随腹板厚度增加,弯扭耦合效应逐渐减弱,而畸变效应的影响相对提高。

#### 4.3.4 腹板类型

为定量对比 1200 型波形腹板与平腹板钢箱组

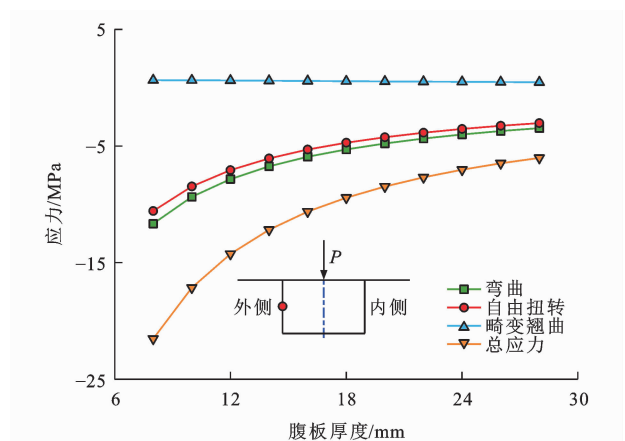


图 19 剪应力随腹板厚度的变化曲线

Fig. 19 Variation of shear stress with web thickness

合梁的弯扭耦合效应差异,定义参数  $\zeta$  为中心加载工况下弯箱梁与对应直箱梁在  $L/4$  截面外腹板高度中点处的剪应力比值。图 20 为  $\zeta$  随宽径比  $B/R$  的变化规律。

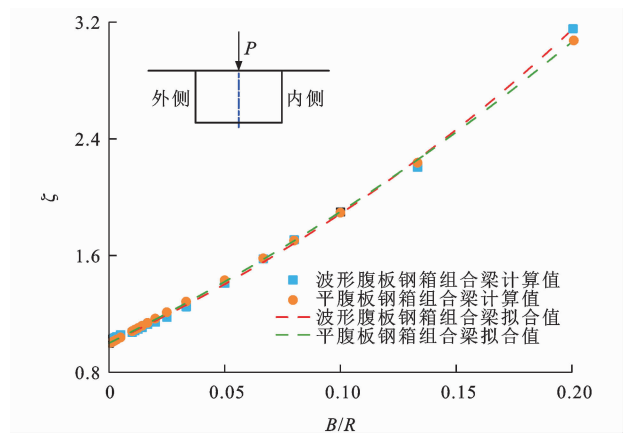


图 20 剪应力比  $\zeta$  随宽径比的变化曲线

Fig. 20 Variation of shear stress ratio  $\zeta$  with width-to-radius ratio

由图 20 可知:在大曲率范围内( $R/B < 10$ ),波形腹板钢箱组合梁的弯扭耦合效应略强于平腹板钢箱组合梁;而在小曲率范围内,二者差异甚微。当  $R/B \geq 70$  (对应圆心角不大于  $5.5^\circ$ ) 时,弯扭耦合效应较弱,工程设计中可予以忽略。进一步计算表明,当  $R/B=10$  时,1200 型、1600 型波形腹板钢箱组合梁及平腹板钢箱组合梁在  $L/4$  截面的偏载系数(定义同第 4.2 节)分别为 1.33、1.35、1.31。综合分析结果可知,腹板类型对钢箱组合弯梁的关键力学性能影响有限,不同梁型各项力学指标具有较高相似性。

## 5 结语

(1)波形腹板钢箱组合弯梁的剪应力主要由弯曲剪应力和自由扭转剪应力组成;受顶、底板约束,腹板剪应力沿高度方向并非均匀分布,近顶、底板区

域呈折线状分布;若采用全截面均匀分布假设,部分区域剪应力的计算结果将偏于不安全。

(2)初始曲率及曲率沿梁宽变化对剪应力计算准确度影响显著;对于大曲率弯箱梁,考虑二者后可以使自由扭转剪应力和畸变翘曲剪应力的准确度分别提高约 5.0%和 13.8%。相比于直腹板箱梁,斜腹板箱梁的剪应力分布对曲率变化更为敏感。

(3) $R/B=10$  和  $70$  可作为判别弯扭耦合效应强弱的关键界限值;当  $R/B<10$  时,弯扭耦合效应显著增强,且中心加载工况下内、外腹板剪应力方向相反;当  $R/B\geq 70$  时,弯扭耦合效应较弱,工程设计中可予以忽略。

(4)波形腹板钢箱组合梁的偏载效应显著,直接套用混凝土箱梁的剪应力偏载系数将导致结构偏于不安全;同时,波形腹板与平腹板钢箱组合梁的偏载系数较为接近;结合本文研究成果与相关文献数据,建议波形腹板钢箱组合梁的剪应力偏载系数取值不宜小于 1.33。

(5)约束扭转与畸变效应对剪应力计算结果影响显著,忽略后将使外腹板在外偏载、中心加载和内偏载工况下的平均误差分别为 3.3%、5.4% 和 9.0%,精确分析中应予以考虑。腹板剪应力分布受其几何参数影响明显:剪应力随腹板倾角增大而增大,其中自由扭转剪应力最为敏感;随腹板高度或厚度增加而减小,且增大腹板厚度可在一定程度上抑制弯扭耦合效应。

(6)本文对弹性阶段简支弯梁的剪应力解析计算展开研究,后续应系统开展试验与数值分析,并将研究范围拓展至变截面连续弯梁。

## 参 考 文 献 :

### References :

[1] 王春生,王晓平,朱经纬,等.波形钢腹板管翼缘组合梁抗弯性能试验研究[J].桥梁建设,2019,49(1):18-23.  
WANG Chun-sheng, WANG Xiao-ping, ZHU Jing-wei, et al. Experimental research on flexural behavior of steel and concrete composite girders with a rectangular tubular up-flange and a corrugated steel web[J]. Bridge Construction, 2019, 49(1): 18-23.

[2] 陈康明,黄汉辉,吴庆雄,等.波形钢腹板-钢管混凝土桁式弦杆组合梁桥疲劳性能[J].交通运输工程学报,2022,22(5):200-216.  
CHEN Kang-ming, HUANG Han-hui, WU Qing-xiong, et al. Fatigue performance of composite girder bridge with corrugated steel webs-concrete filled steel tubular truss chords[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2022, 22(5): 200-216.

[3] 陈宏彬,黄光铃,陈宜言,等.变截面连续波形钢腹板-平钢板组合梁桥应力偏载系数研究[J].世界桥梁,2025,53(2):111-118.  
CHEN Hong-bin, HUANG Guang-ling, CHEN Yi-yan, et al. Research on stress eccentric load coefficients of continuous composite girder bridge with corrugated steel webs and flat steel bottom plates[J]. World Bridges, 2025, 53(2): 111-118.

[4] 董桔灿,陈宜言,BRISEGHELLA Bruno,等.波形钢腹板-双管弦杆-混凝土板组合连续箱梁受弯性能[J].交通运输工程学报,2016,16(3):35-45.  
DONG Ju-can, CHEN Yi-yan, BRISEGHELLA B, et al. Flexural behaviors of composite continuous box-girder with corrugated steel webs, double concrete filled steel tubular chords and concrete slabs [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2016, 16(3): 35-45.

[5] 李宏江.波形钢腹板PC组合箱梁几个特殊问题研究进展[J].应用基础与工程科学学报,2018,26(2):440-454.  
LI Hong-jiang. Review on special issues in prestressed concrete box girders with corrugated steel webs[J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2018, 26(2): 440-454.

[6] 李宏江.波形钢腹板预应力混凝土组合箱梁扭转与畸变研究进展[J].建筑结构学报,2017,38(7):59-67.  
LI Hong-jiang. Review on torsion and distortion in prestressed concrete box girders with corrugated steel webs[J]. Journal of Building Structures, 2017, 38(7): 59-67.

[7] ZHOU M, LIAO J C, AN L. Shear properties of tapered box girders with steel trapezoidally corrugated webs considering resal effect[J]. Journal of Bridge Engineering, 2020, 25: 04019126.

[8] 吴启明,肖玉凤,郭宗明,等.单箱多室波形钢腹板组合箱梁腹板剪力分配理论[J].建筑钢结构进展,2021,23(8):61-66,75.  
WU Qi-ming, XIAO Yu-feng, GUO Zong-ming, et al. Shear force distribution on the web of single-box multi-cell composite girders with corrugated steel webs[J]. Progress in Steel Building Structures, 2021, 23(8): 61-66, 75.

[9] 冀伟,黄逸航,罗奎,等.单箱三室变截面波形钢腹板组合梁剪应力分析[J].铁道科学与工程学报,2024,21(3):1090-1101.  
JI Wei, HUANG Yi-hang, LUO Kui, et al. Analysis of shear stress of single-box double-cell variable cross-section composite box beams with corrugated steel web[J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2024, 21(3): 1090-1101.

[10] 邓文琴,毛泽亮,刘朵,等.单箱三室波形钢腹板悬臂梁扭转与畸变分析及试验研究[J].建筑结构学报,2020,41(2):173-181.  
DENG Wen-qin, MAO Ze-liang, LIU Duo, et al. Analysis and experimental study on torsion and distortion of single box three-cell cantilever girder with corrugated steel webs[J]. Journal of Building Structures, 2020, 41(2): 173-181.

[11] 张元海,孙成成.波形钢腹板箱梁考虑腹板局部纵向刚度影响的扭转效应分析[J].东南大学学报(自然科学版),2021,51(2):195-201.  
ZHANG Yuan-hai, SUN Cheng-cheng. Analysis on the

- torsion effect of box girders with corrugated steel webs considering local longitudinal stiffness of webs[J]. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2021, 51(2): 195-201.
- [12] WANG C, ZHANG Y L, ZHANG X, et al. Coupled bending-torsion behaviour of single-box multi-cell curved composite box-girders with corrugated-steel-webs [J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2022, 196: 107411.
- [13] ZHANG Y L, WANG C, ZHANG X, et al. Exact distortional behaviour of single-box multicell curved composite box girders with corrugated steel webs in the elastic stage[J]. *Engineering Structures*, 2023, 297: 116961.
- [14] 许立言,郭婷,张屹垚,等.曲线波形钢腹板组合箱梁空间受力性能研究[J].*建筑结构学报*,2023,44(增1):165-173.  
XU Li-yan, GUO Ting, ZHANG Yi-yao, et al. Study on spatial mechanical behavior of curved composite box girder with corrugated steel webs [J]. *Journal of Building Structures*, 2023, 44(S1): 165-173.
- [15] LIU S M, DE CORTE W, DING H S, et al. A comparison of the mechanical properties of curved box girders with corrugated steel webs to curved box girders with concrete webs [J]. *Advances in Structural Engineering*, 2022, 25(10): 2103-2120.
- [16] 王春生,姚常伟.基于旋转壳理论和横隔板实际刚度的波形腹板钢箱组合弯梁畸变行为分析[J/OL].*土木工程学报*,2025, <https://doi.org/10.15951/j.tmgcxb.25050320>.  
WANG Chun-sheng, YAO Chang-wei. Distortional behavior analysis of curved composite steel box girders with corrugated webs based on rotating shell theory and effective diaphragm stiffness[J/OL]. *China Civil Engineering Journal*, 2025, <https://doi.org/10.15951/j.tmgcxb.25050320>.
- [17] YAO C W, WANG C S, ZHANG W T. A theoretical model of bending-torsion coupling behavior for curved composite box girders with corrugated steel webs[J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2026, 239: 110220.
- [18] BASHER M, SHANMUGAM N E, KHALIM A R. Horizontally curved composite plate girders with trapezoidally corrugated webs[J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2011, 67(6): 947-956.
- [19] YOSSEF N M. A new approach to estimate the shear strength of curved corrugated steel webs[J]. *Structures*, 2020, 24: 400-414.
- [20] ZHANG Z, TANG Y, LI J, et al. Torsional behavior of box-girder with corrugated web and steel bottom flange[J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2020, 167: 105855.
- [21] BHASKAR K, VARADAN T K. A higher-order theory for bending analysis of laminated shells of revolution [J]. *Computers & Structures*, 1991, 40(4): 815-819.
- [22] 李国豪.大曲率薄壁箱梁的扭转和弯曲[J].*土木工程学报*, 1987,20(1):65-75.  
LI Guo-hao. Torsion and bending of thin-walled box girder with great initial curvature [J]. *China Civil Engineering Journal*, 1987, 20(1): 65-75.
- [23] ZHU L, KAI-LEUNG SU R, LI M J. Finite beam element with 26 DOFs for curved composite box girders considering constrained torsion, distortion, shear lag and biaxial slip[J]. *Engineering Structures*, 2021, 232: 111797.
- [24] 张元海,李乔.曲线箱梁考虑剪滞效应时的弯扭分析[J].*工程力学*,2009,26(10):123-129.  
ZHANG Yuan-hai, LI Qiao. Flexural-torsional analysis of curved box-girders with the consideration of the shear lag effect[J]. *Engineering Mechanics*, 2009, 26(10): 123-129.
- [25] CAMPO-RUMOROSO I, RAMOS-GUTIÉRREZ Ó R, CAMBRONERO-BARRIENTOS F. Distortion analysis of horizontally curved trapezoidal box girder bridges [J]. *Engineering Structures*, 2023, 282: 115798.
- [26] 李夏元,万水,付理想,等.一种考虑波形钢腹板等效剪切变形自由度的新型箱梁单元[J].*交通运输工程学报*,2025, 25(5):385-398.  
LI Xia-yuan, WAN Shui, FU Li-xiang, et al. A novel box girder beam element considering equivalent shear deformation freedom of corrugated steel webs[J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2025, 25(5): 385-398.
- [27] WANG C S, ZHANG W T, LI H T, et al. Shear lag effect of twin I-shaped composite girders in cable-stayed bridges[J]. *Thin-walled Structures*, 2022, 180: 109822.
- [28] WANG C S, ZHANG W T, YANG M Y. Shear lag effect of composite girders in cable-stayed bridges under dead loads[J]. *Engineering Structures*, 2023, 281: 115752.
- [29] 刘素梅.波形钢腹板组合曲线箱梁力学性能理论及试验研究[D].南京:东南大学,2020.  
LIU Su-mei. Theoretical and experimental study on the mechanical properties of curved composite box girders with corrugated steel webs[D]. Nanjing: Southeast University, 2020.
- [30] 李宏江.波形钢腹板箱梁扭转与畸变的试验研究及分析[D].南京:东南大学,2003.  
LI Hong-jiang. Experimental study and analysis on torsion and distortion of box-girder with corrugated steel webs. Nanjing: Southeast University, 2003.
- [31] NASSR A A, ABD-EL-RAHIM H H A, KAISER F, et al. Topology optimization of horizontally curved box girder diaphragms[J]. *Engineering Structures*, 2022, 256: 113959.
- [32] 赵秋,李天宇,陈宜言.波形钢腹板组合箱梁桥抗剪承载力计算方法[J].*交通运输工程学报*,2026,26(5):154-165.  
ZHAO Qiu, LI Tian-yu, CHEN Yi-yan. Calculation of shear capacity of corrugated steel web combination box girder [J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2026, 26(5): 154-165.
- [33] ARICI M, GRANATA M F, LONGO G. Symplectic analysis of thin-walled curved box girders with torsion, distortion and shear lag warping effects[J]. *Thin-walled Structures*, 2022, 175: 109244.