

文章编号:1671-1637(2026)06-0090-14

考虑翼缘板剪力协调的波形钢腹板组合箱梁单元

李夏元^{*1,2}, 周 满³, 李立峰⁴, 陈 俊², 付理想², 康爱红¹

(1. 扬州大学 土木与交通学院, 江苏 扬州 225127; 2. 江苏瑞沃建设集团有限公司, 江苏 扬州 225600;
3. 武汉大学 土木建筑工程学院, 湖北 武汉 430072; 4. 湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

摘 要:为研究波形钢腹板组合箱梁的剪力分配问题,提出了一种可综合考虑波形钢腹板与翼缘板剪力分配关系以及横隔板约束影响的新型箱梁单元(TBTF-CSW);通过引入翼缘板剪应变传递系数,实现了上、下翼缘板和波形钢腹板剪力的有效分离;考虑变截面效应,推导了变截面波形钢腹板组合箱梁的剪力分配计算表达式,建立了考虑翼缘板和波形钢腹板剪切变形影响的理论分析模型;基于能量变分原理,推导出考虑翼缘板剪力协调的控制微分方程,并将波形钢腹板的剪切变形引入为附加自由度,选用控制微分方程的齐次解构造了广义位移(竖向挠度、波形钢腹板等效剪应变和等效弯曲转角)的插值函数;结合有限元法,构建了考虑波形钢腹板和翼缘板剪切变形影响的两节点六自由度箱梁单元;通过典型算例分析,验证了TBTF-CSW梁单元计算等截面和变截面波形钢腹板组合箱梁腹板剪应力和剪力分配的精度与适用性。研究表明:在等截面波形钢腹板组合箱梁中,波形钢腹板承担主要剪力,其承剪比例受材料特性和截面几何参数影响,端横隔板和集中荷载会引起局部突变;在变截面波形钢腹板组合箱梁中,受下翼缘板轴力的影响,变截面效应显著增强,下翼缘板与波形钢腹板均可能出现“剪力超分配”现象,此时认为腹板承担全部剪力的假设将偏于不安全。提出的TBTF-CSW梁单元可为波形钢腹板组合箱梁的剪力分配理论分析与工程设计提供有效支撑。

关键词:桥梁工程;波形钢腹板;有限元法;TBTF-CSW梁单元;剪应变传递系数;变截面效应;剪力超分配

中图分类号:U448.21 **文献标志码:**A **DOI:**10.19818/j.cnki.1671-1637.2026.193

Composite box girder beam element with corrugated steel webs considering shear force interaction in flange plates

LI Xia-yuan^{*1,2}, ZHOU Man³, LI Li-feng⁴, CHEN Jun², FU Li-xiang², KANG Ai-hong¹

(1. School of Civil Engineering and Transportation, Yangzhou University, Yangzhou 225127, Jiangsu, China;
2. Jiangsu Ruiwo Construction Group Co., Ltd., Yangzhou 225600, Jiangsu, China; 3. School of Civil Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, Hubei, China; 4. School of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, Hunan, China)

Abstract: To investigate the shear force distribution in composite box girder with corrugated steel webs (CSWs), a novel box girder beam element (TBTF-CSW) comprehensively was proposed considering the shear force distribution relationship between CSWs and flange plates, as well as

出版历程:2025-10-02 收稿, 2025-12-16 修回, 2026-01-23 录用

基金项目:国家自然科学基金项目(52308214);中国博士后科学基金项目(2023M742957);江苏省结构工程重点实验室开放课题(ZD2203);江苏省高等学校基础科学(自然科学)研究项目(23KJD560007)

*** 作者简介:**李夏元(1989-),男,江苏扬州人,讲师,工学博士,博士后, E-mail:lixiaoyuan123@163.com。

引用格式:李夏元,周 满,李立峰,等.考虑翼缘板剪力协调的波形钢腹板组合箱梁单元[J].交通运输工程学报,2026,26(6):90-103.

Citation: LI Xia-yuan, ZHOU Man, LI Li-feng, et al. Composite box girder beam element with corrugated steel webs considering shear force interaction in flange plates[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2026, 26(6): 90-103.

the influence of diaphragm constraints. By introducing shear strain transfer coefficients for the flange plates, the shear forces carried by CSWs, top and bottom flange plates were effectively decoupled. Considering the variable cross-section effect, analytical expressions for the shear force distribution in variable cross-section composite box girders with CSWs were derived, and a theoretical analysis model was established considering shear deformation influence in both the flange plates and CSWs. Based on the energy variational principle, the controlled differential equations that consider the shear force interaction of the flange plates were formulated. The shear deformation of the CSWs was then introduced as an additional degree of freedom. The homogeneous solutions of the controlled differential equations were used to construct interpolating functions for the generalized displacements, including vertical deflection, CSWs equivalent shear strain, and equivalent bending rotation. By integrating the finite element method, a two-node six-degree-of-freedom box-girder beam element considering the shear deformation influence of both CSWs and flange plates was developed. A series of typical numerical examples were analyzed to verify the accuracy and applicability of the TBTF-CSW beam element in calculating the shear stress and shear force distribution for composite box girders with constant and variable cross-sections. The results indicate that in the constant cross-section composite box girders with CSWs, the CSWs carry the majority of the shear force, with the distribution primarily affected by material characteristics and geometric parameters. The diaphragms and concentrated loads introduce local disturbances. In variable cross-section composite box girders, the axial force in the bottom flange plate leads to significant variable cross-section effect. Either the bottom flange plate or CSWs may experience “shear overdistribution”. In such cases, it becomes unsafe to assume that the CSWs carry the entire shear force. The proposed TBTF-CSW beam element provides an effective support for theoretical analysis of shear force distribution and engineering design for composite box girders with CSWs.

Keywords: bridge engineering; corrugated steel web; finite element method; TBTF-CSW beam element; shear strain transfer coefficient; variable cross-section effect; shear force over-distribution

Publication history: Received 2025-10-02; Received in revised form 2025-12-16; Accepted 2026-01-23

Funding: National Natural Science Foundation of China (52308214); China Postdoctoral Science Foundation (2023M742957); Key Laboratory of Structural Engineering of Jiangsu Province (ZD2203); Jiangsu Provincial College Natural Science Research Program (23KJD560007)

* **Corresponding author:** LI Xia-yuan, lecturer, PhD, E-mail: lixiayuan123@163.com.

0 引 言

为解决传统预应力混凝土箱梁桥主跨持续下挠和腹板易开裂等问题,国内外学者逐步提出采用波形钢腹板代替混凝土腹板,构建新型桥梁结构体系^[1-5]。由于波形钢腹板壁厚较薄且存在褶皱效应,其剪应力通常被简化为沿腹板高度方向均匀分布^[6-8]。然而,目前关于波形钢腹板实际承担剪力的合理计算方法仍未统一。因此,开展波形钢腹板组合箱梁剪力分配研究,不仅有助于揭示其剪切受力机理,也能为结构设计与分析提供理论支撑,具有重

要的理论意义和工程应用价值。

李宏江等^[9-11]通过测试对称弯曲荷载作用下试验梁的应变分布发现,波形钢腹板的竖向剪应变显著大于混凝土板的相应值,表明波形钢腹板承担了箱梁截面中绝大部分的剪应力。李立峰等^[12]基于“拟平截面假定”,由截面正应力分布推导了波形钢腹板的剪应力计算公式,分析结果表明,波形钢腹板承担的剪力比例一般在 80% 以上。因此《钢-混凝土组合桥梁设计规范》(GB 50917-2013)建议在剪应力计算中忽略混凝土翼缘板的抗剪贡献,假定受弯构件的剪力完全由钢腹板承担,计算结果偏于安全。

张元海等^[13]通过研究变截面箱形梁的剪应力分布规律发现,截面最大剪应力通常并不出现在形心轴处,而是在梁下部区域或底缘附近。尤其在靠近根部的梁段,底板(统称为下翼缘板)中产生了较大的剪应力。苏俭等^[14]基于微元体分析推导了变截面波形钢腹板组合梁的剪应力计算公式,算例分析表明,变截面梁的剪应力分布规律与等截面梁存在显著差异,部分原本由腹板承担的剪应力向下翼缘板转移,导致腹板剪应力大幅减小,而下翼缘板剪应力显著增加。李准华等^[15]基于变截面波形钢腹板剪应力计算公式对滁河大桥进行了分析,指出在下翼缘板厚度逐渐增大的根部区域,混凝土下翼缘板已分担约 40% 的剪力。李杰等^[16-17]通过将变截面波形钢腹板剪应力的计算结果与等截面梁理论解和有限元分析结果进行对比,发现梁高和下翼缘板厚度的变化对剪应力分布具有显著影响,波形钢腹板的剪应力计算应当考虑变截面效应。Zhou 等^[18-20]推导了变截面波形钢腹板剪应力的解析计算公式,揭示了弯矩、轴力和剪力作用下剪应力的分布规律,并基于弯矩等效原理和附加剪应力的自平衡特性,提出了适用于变截面波形钢腹板剪应力计算的简化方法,即“剩余剪力法”。李立峰等^[21]推导了适用于变截面波形钢腹板组合箱梁的剪应力计算公式,并设计了一片变截面波形钢腹板-UHPC 试验梁对所提理论进行了验证,结果表明,组合箱梁中倾斜的下翼缘板在抗剪过程中起到显著作用,不能被忽略,体现出明显的变截面效应。由上述分析可知,在变截面波形钢腹板组合箱梁的剪应力计算中,若忽视混凝土翼缘板的抗剪作用及变截面效应,将无法准确反映剪力的真实分配,导致计算结果与实际受力状态不符。

此外,波形钢腹板组合箱梁通常在梁端和跨内分别布置刚度较大的端横隔板和中横隔板。在横隔板布置区域,腹板的剪切变形受到一定程度的抑制,从而导致周边混凝土翼缘板中产生不可忽视的附加应力^[22]。聂建国等^[7]推导了端横隔板约束条件下简支波形钢腹板组合板梁在跨中集中荷载作用下的理论解,结果表明端部约束对其邻近区域腹板剪切变形具有显著影响。Zhang 等^[23-24]进一步揭示了波形钢腹板组合梁端横隔板附近混凝土上、下翼缘板附加正应力的分布规律。然而,上述研究主要关注端横隔板对弯曲力学性能的影响,且理论模型均假设剪力完全由钢腹板承担,未能反映端横隔板约束对剪力分配的影响。Chai 等^[25-26]建立了考虑波形

钢腹板剪切变形影响的附加剪力分析模型。通过对比不同边界条件下等截面波形钢腹板算例,发现波形钢腹板的剪应力极值出现在距支座一定距离处,表明支座附近因剪切变形产生附加剪力,导致腹板剪应力显著降低。

波形钢腹板组合箱梁的剪力分配研究一直是工程的热点问题。现有分析方法在求解变截面波形钢腹板组合箱梁剪力分配时仍面临诸多挑战,通常需要预先建立变截面参数随轴向变化的函数关系,推导过程复杂,适用范围有限。此外,变截面波形钢腹板剪应力计算公式仅能获取腹板的剪应力分布,缺乏对上、下翼缘板剪力的分离机制,难以准确反映箱形截面各组成部分的剪力分配关系。波形钢腹板与翼缘板剪切变形协调关系以及横隔板约束的影响亦未在现有模型中得到充分体现。因此,如何在变截面波形钢腹板组合箱梁中建立合理的剪力分配关系,并能分别考虑各组成部分剪切变形及横隔板约束的影响,仍是亟待解决的关键问题;而寻求简化的计算方法是实现这一目标的有效途径。

本文通过引入翼缘板剪应变传递系数,建立考虑翼缘板剪力协调、变截面效应以及波形钢腹板剪切变形影响的理论分析模型。基于能量变分原理,推导波形钢腹板组合箱梁的控制微分方程,并选取合适的位移模式构造广义位移的插值函数。结合有限单元法,提出一种能综合考虑波形钢腹板和翼缘板剪切变形以及横隔板约束影响的新型箱梁单元。通过算例分析验证理论推导的正确性,并进一步评估新型箱梁单元的计算精度与适用性,展示其在实际工程中的应用潜力。

1 波形钢腹板组合箱梁的理论模型

1.1 符号惯例与坐标系

图 1 给出了波形钢腹板组合箱梁的理论分析模型,该模型由混凝土上、下翼缘板和波形钢腹板组成。以截面形心 O 点为原点,建立截面直角坐标系 $Oxyz$ 。图 1 中: e_t 和 e_b 分别为上、下翼缘板厚度的一半; h_t 和 h_b 分别为波形钢腹板梁顶、底距形心的垂直距离; h_w 为波形钢腹板的高度, $h_w = h_t + h_b$; z_t 和 z_b 分别为上、下翼缘板中面距形心的垂直距离; h_c 为上、下翼缘板中面之间的间距, $h_c = z_t + z_b$; w' 为竖向挠度 w 的一阶导数; γ 为波形钢腹板的等效剪应变, $\gamma = w' - \theta$, θ 为组合箱梁的弯曲转角; φ 为组合箱梁的等效弯曲转角; τ_t 和 τ_b 分别为上、下翼缘板的等效剪应力; b_1 、 b_2 、 b_3 、 b_4 分别为下翼缘板半

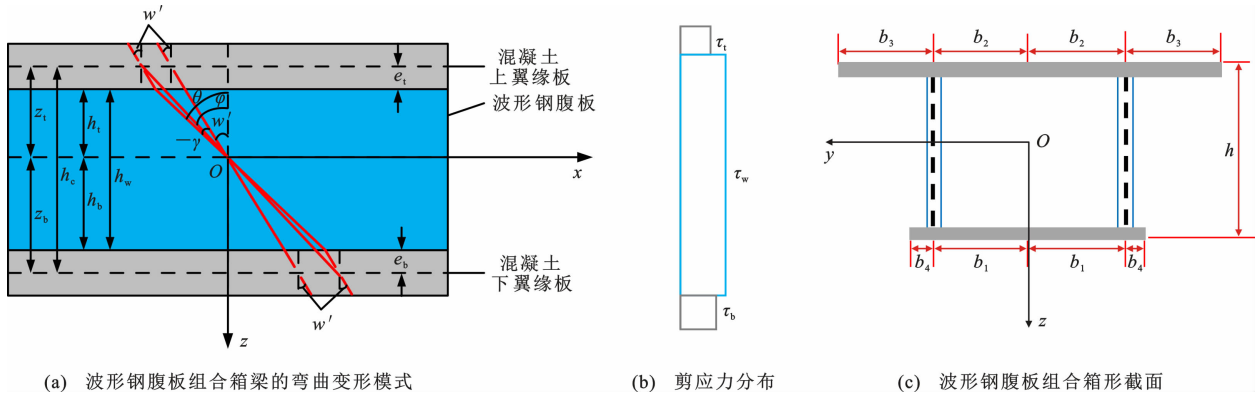


图1 波形钢腹板组合箱梁分析模型

Fig. 1 Analytical model of composite box girder with CSWs

宽、上翼缘板半宽、悬臂上翼缘板宽、悬臂下翼缘板宽; \$h\$ 为组合箱梁的高度。

1.2 基本假设

本文旨在建立考虑翼缘板剪力协调的波形钢腹板组合箱梁理论分析模型,其理论推导基于如下假设。

(1)上、下翼缘板和波形钢腹板的竖向位移完全一致,忽略其相对竖向变形。

(2)翼缘板满足 Euler-Bernoulli 梁假设(变形后截面保持平面且垂直于中面),忽略剪切变形对翼缘板弯曲转角的影响。

(3)材料处于弹性范围内,应力-应变关系符合 Hooke 定律。

(4)忽略波形钢腹板轴向刚度的影响,假定上、下翼缘板和波形钢腹板的剪应力在各自平面内沿高度方向均匀分布。

1.3 位移与内力

当波形钢腹板组合箱梁发生如图 1(a)所示的弯曲变形时,根据基本假设(2)和变形协调条件,可建立组合箱梁等效弯曲转角 \$\varphi\$ 与竖向挠度 \$w\$ 和波形钢腹板等效剪应变 \$\gamma\$ 的几何表达式^[8]为

$$\begin{cases} \varphi = w' - \beta_E \gamma \\ \beta_E = h_w h_c^{-1} \end{cases} \quad (1)$$

式中: \$\beta_E\$ 为波形钢腹板二次等效剪切变形影响系数。

弹性范围内,波形钢腹板组合箱梁上、下翼缘板面内任意点的纵向位移 \$u_t, u_b\$ 分别为

$$u_t = \varphi z_t - w' z_2 \quad z_2 \in [-e_t, e_t] \quad (2)$$

$$u_b = -\varphi z_b - w' z_1 \quad z_1 \in [-e_b, e_b] \quad (3)$$

式中: \$z_1\$ 为下翼缘板任意点位置相对于下翼缘板中面的 \$z\$ 轴坐标; \$z_2\$ 为上翼缘板任意点位置相对于上翼缘板中面的 \$z\$ 轴坐标。

根据基本假设(3),上、下翼缘板面内任意点的正应力 \$\sigma_t, \sigma_b\$ 分别为

$$\sigma_t = E_c \epsilon_t = E_c (\varphi' z_t - w'' z_2) \quad (4)$$

$$\sigma_b = E_c \epsilon_b = E_c (-\varphi' z_b - w'' z_1) \quad (5)$$

式中: \$E_c\$ 为混凝土的弹性模量。

根据基本假设(4),上、下翼缘板和波形钢腹板面内任意点的剪应力 \$\tau_t, \tau_b, \tau_w\$ 分别为

$$\tau_t = G_c \gamma_t = G_c \beta_t \gamma \quad (6)$$

$$\tau_b = G_c \gamma_b = G_c \beta_b \gamma \quad (7)$$

$$\tau_w = \alpha_E^{-1} G_{sc} \gamma \quad (8)$$

式中: \$G_c\$ 为混凝土的剪切模量; \$\beta_t, \beta_b\$ 分别为上、下翼缘板的剪应变传递系数; \$\alpha_E\$ 为波形钢腹板等效剪切变形影响系数; \$G_{sc}\$ 为波形钢腹板竖向面内等效剪切模量^[27-28]。

分别对上、下翼缘板正应力 \$\sigma_t, \sigma_b\$ 进行面内积分,并将结果叠加,可得到组合箱梁轴力 \$N\$ 和弯矩 \$M\$ 的表达式为

$$N = N_t + N_b = 0 \quad (9)$$

$$\begin{cases} M = M_t + M_b + N_b z_b - N_t z_t \\ N_t = E_c \varphi' z_t A_t \\ N_b = -E_c \varphi' z_b A_b \\ M_t = -E_c I_t w'' \\ M_b = -E_c I_b w'' \end{cases} \quad (10)$$

式中: \$N_t\$ 为上翼缘板轴力; \$N_b\$ 为下翼缘板轴力; \$M_t\$ 为上翼缘板转动产生的弯矩; \$M_b\$ 为下翼缘板转动产生的弯矩; \$A_t\$ 为上翼缘板的面积; \$A_b\$ 为下翼缘板的面积; \$I_t\$ 为上翼缘板的抗弯惯性矩; \$I_b\$ 为下翼缘板的抗弯惯性矩。

对波形钢腹板剪应力 \$\tau_w\$ 进行面内积分,可得到波形钢腹板剪力 \$F_w\$ 的表达式为

$$F_w = \alpha_E^{-1} G_{sc} A_w \gamma \quad (11)$$

式中: \$A_w\$ 为波形钢腹板的面积。

分别对上、下翼缘板剪应力 τ_t 、 τ_b 进行面内积分,并叠加翼缘板转动弯矩产生的附加剪力以及波形钢腹板承担的剪力,可得到组合箱梁剪力的表达式为

$$\begin{cases} F = F_t + F_b + F_w \\ F_t = G_c \beta_t A_t \gamma - E_c I_t \omega''' \\ F_b = G_c \beta_b A_b \gamma - E_c I_b \omega''' \end{cases} \quad (12)$$

式中: F_t 为上翼缘板的剪力; F_b 为下翼缘板的剪力。

1.4 翼缘板剪应变传递系数

为研究波形钢腹板组合箱梁翼缘板剪应变传递系数,从图 1 所示梁中取长度为 dx 的微段,如图 2 所示。

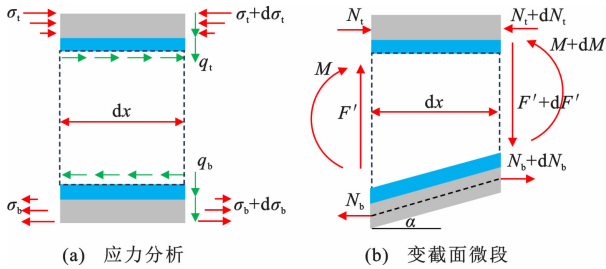


图 2 微段受力分析

Fig. 2 Force analysis diagram of micro-segment

由于翼缘板转动弯矩产生的剪力可由其一阶导数表示,因此在计算截面轴力合成弯矩 ($N_b z_b - N_t z_t$) 产生的翼缘板剪应力时,不再单独考虑其转动弯矩的影响。基于静力平衡关系,分别推导出上、下翼缘板面内剪力流 q_t 、 q_b 的分布函数,并在各自平面内积分,进而得到上、下翼缘板的剪力 F_t 、 F_b 为

$$F_t = \int_0^{2e_t} q_t dz = \int_0^{2e_t} \int \frac{d\sigma_t}{dx} dA_t dz \quad (13)$$

$$F_b = \int_0^{2e_b} q_b dz = \int_0^{2e_b} \int \frac{d\sigma_b}{dx} dA_b dz \quad (14)$$

而由式(12)可知,上、下翼缘板承担的剪力与剪应变传递系数 β_t 、 β_b 有关。因此,联立式(12)~(14),可确定上、下翼缘板的剪应变传递系数 β_t 、 β_b 为

$$\frac{F_t}{F_b} = \frac{\beta_t A_t}{\beta_b A_b} \quad (15)$$

$$\frac{F_t}{F} = \frac{G_c \beta_t A_t}{G_c \beta_t A_t + G_c \beta_b A_b + \alpha_E^{-1} G_{sc} A_w} \quad (16)$$

在变截面波形钢腹板组合箱梁中,梁高和下翼缘板厚度通常沿桥梁纵向呈抛物线或线性变化,导致下翼缘板形心位置随轴向改变。下翼缘板承受的轴力由于形心偏移而产生附加弯矩 $N_b \tan(\alpha) dx$,进而影响截面各组成部分的剪力分布。因此,对图

2(b)所示变截面微段 dx 的形心取矩,建立包含附加弯矩项的平衡方程

$$F' + N_b \tan(\alpha) dx = \frac{dM}{dx} \quad (17)$$

式中: α 为下翼缘板形心连线的水平倾角; F' 为变截面梁微段剪力。

相应地,变截面梁段上、下翼缘板和波形钢腹板的剪力可进一步表示为

$$F'_t = F_t + \int_0^{2e_b} N_b \tan(\alpha) S_t I_{c2}^{-1} dz \quad (18)$$

$$F'_b = F_b - N_b \tan(\alpha) + \int_0^{2e_t} N_b \tan(\alpha) S_b I_{c2}^{-1} dz \quad (19)$$

$$\begin{cases} F'_w = F_w + N_b \tan(\alpha) \left(1 - \int_0^{2e_t} S_b I_{c2}^{-1} dz - \int_0^{2e_b} S_t I_{c2}^{-1} dz \right) \\ I_{c2} = A_t z_t^2 + A_b z_b^2 \end{cases} \quad (20)$$

式中: F'_b 为变截面梁段的下翼缘板剪力; F'_w 为变截面梁段的波形钢腹板剪力; S_t 为上翼缘板面积函数对形心的静矩; S_b 为下翼缘板面积函数对形心的静矩; I_{c2} 为上、下翼缘板形心对截面形心的平移惯性矩之和。

当 $\alpha=0$ 时,式(18)~(20)与等截面波形钢腹板组合箱梁上、下翼缘板和波形钢腹板的剪力表达式一致,验证了理论公式的正确性与通用性。

2 波形钢腹板组合箱梁单元模型

当波形钢腹板组合箱梁承受外荷载时,其弯曲变形模式如图 1(a)所示。此时结构内部存储弹性应变能,外力做功转化为荷载势能^[29]。

2.1 组合箱梁的势能

2.1.1 应变能

波形钢腹板组合箱梁的弹性应变能由上、下翼缘板和腹板的应变能叠加而成。

上翼缘板的应变能 U_t 为

$$U_t = \int_0^L \int \left(\frac{1}{2} E_c \epsilon_t^2 + \frac{1}{2} G_c \beta_t \beta_E \gamma^2 \right) dA_t dx \quad (21)$$

下翼缘板的应变能 U_b 为

$$U_b = \int_0^L \int \left(\frac{1}{2} E_c \epsilon_b^2 + \frac{1}{2} G_c \beta_b \beta_E \gamma^2 \right) dA_b dx \quad (22)$$

波形钢腹板的应变能 U_w 为

$$U_w = \int_0^L \int \frac{1}{2} \alpha_E^{-1} G_{sc} \beta_E \gamma^2 dA_w dx \quad (23)$$

2.1.2 荷载势能

荷载的外力势能 U_p 为

$$U_p = - \int_0^L q w dx - \sum_j P_j w_j \quad (24)$$

式中: q 为均布荷载集度; w_j 为集中载荷 P_j 作用点的竖向挠度, 集中载荷 P_j 可以看作是均布荷载的特殊情况, 不再单独列出。

叠加式(21)~(24), 得到波形钢腹板组合箱梁势能 Π_p 的泛函表达式

$$\begin{aligned} \Pi_p = U_t + U_b + U_w + U_p = \int_0^L \left(\frac{E_c I_{c1}}{2} w''^2 + \right. \\ \left. \frac{E_c I_{c2}}{2} \varphi'^2 \right) dx + \int_0^L \left[\frac{1}{2\beta_E} (G_c \beta_t A_t + G_c \beta_b A_b + \right. \\ \left. \alpha_E^{-1} G_{se} A_w) (w' - \varphi)^2 \right] dx - \int_0^L q w dx \quad (25) \end{aligned}$$

$$I_{c1} = I_t + I_b$$

2.2 控制微分方程

将势能驻值条件 $\delta \Pi_p = 0$ 表达成如下形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_p}{\partial \varphi} \delta \varphi = - \frac{1}{\beta_E} (G_c \beta_t A_t + G_c \beta_b A_b + \\ \alpha_E^{-1} G_{se} A_w) (w' - \varphi) \delta \varphi \quad (26) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \varphi} \delta \varphi' = E_c I_{c2} \varphi' \delta \varphi' \quad (27)$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial w} \delta w = - q \delta w \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_p}{\partial w} \delta w' = - \frac{1}{\beta_E} (G_c \beta_t A_t + G_c \beta_b A_b + \\ \alpha_E^{-1} G_{se} A_w) (w' - \varphi) \delta w' \quad (29) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial w} \delta w'' = E_c I_{c1} w'' \delta w'' \quad (30)$$

根据变分引理, 推导出考虑翼缘板剪力协调的波形钢腹板组合箱梁控制微分方程

$$\begin{aligned} -E_c I_{c2} \varphi'' - \frac{w' - \varphi}{\beta_E} (G_c \beta_t A_t + G_c \beta_b A_b + \\ \alpha_E^{-1} G_{se} A_w) = 0 \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_c I_{c1} w^{(4)} - \frac{w'' - \varphi'}{\beta_E} (G_c \beta_t A_t + G_c \beta_b A_b + \\ \alpha_E^{-1} G_{se} A_w) - q = 0 \quad (32) \end{aligned}$$

将式(10)、(12)代入式(31)、(32), 可得到

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial x} = F \\ \frac{\partial F}{\partial x} = -q \end{cases} \quad (33)$$

由材料力学可知, 式(33)为杆件的内力平衡微分方程, 表明基于最小势能原理推导得到的波形钢腹板组合箱梁控制微分方程与内力平衡微分方程一致, 验证了理论推导的正确性。

将式(31)微分, 代入式(32), 则有

$$E_c I_{c1} w^{(4)} + E_c I_{c2} \varphi^{(3)} - q = 0 \quad (34)$$

将式(1)中 w' 的表达式代入式(34), 可得到组合箱梁等效弯曲转角 φ 的微分方程

$$\varphi^{(5)} - k^2 \varphi^{(3)} + q = 0 \quad (35)$$

$$k^2 = \frac{I_c (G_c \beta_t A_t + G_c \beta_b A_b + \alpha_E^{-1} G_{se} A_w)}{\beta_E E_c I_{c1} I_{c2}}$$

将式(31)代入式(1), 竖向挠度的一阶导数 w' 可表示为

$$w' = \varphi - \frac{I_c}{k^2 I_{c1}} \varphi^{(3)} \quad (36)$$

当 $q=0$ 时, 求得波形钢腹板组合箱梁等效弯曲转角 φ 和竖向挠度 w 的齐次解, 即

$$\varphi = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \sinh(kx) + C_5 \cosh(kx) \quad (37)$$

$$w = C_1 x + \frac{C_2 x^2}{2} + \frac{C_3 x^3}{3} - \frac{2C_3 I_c}{k^2 I_{c1}} + C_6 + \frac{C_4}{k} \cdot$$

$$\left(1 - \frac{I_c}{I_{c1}} \right) \cosh(kx) + \frac{C_5}{k} \left(1 - \frac{I_c}{I_{c1}} \right) \sinh(kx) \quad (38)$$

式中: $C_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 为待定系数。

将式(37)、(38)代入式(1), 求得波形钢腹板等效剪应变 γ 的齐次解, 即

$$\gamma = - \frac{I_c}{\beta_E I_{c1}} \left[\frac{2C_3}{k^2} + C_4 \sinh(kx) + C_5 \cosh(kx) \right] \quad (39)$$

当 $\gamma=0$ 时, 表明波形钢腹板组合箱梁中的剪切变形受到抑制, 其行为特征与考虑横隔板约束情况一致。

2.3 一维箱梁单元 TBTF-CSW

选取广义位移 w, γ, φ 作为结点自由度, 提出一种新型一维箱梁单元 TBTF-CSW, 单元长度 L , 如图 3 所示, 该单元可分别考虑上、下翼缘板和波形钢腹板剪切变形以及横隔板约束的影响。在局部直角坐标系 $Ox'y'z'$ 中, 单元两端结点的广义位移列向量 δ^e 为

$$\delta^e = (w_i, \gamma_i, \varphi_i, w_j, \gamma_j, \varphi_j)^T \quad (40)$$

相应的单元两端结点的广义力列向量 F^e 为

$$\begin{cases} F^e = (F_i, M_{\gamma, i}, M_i, F_j, M_{\gamma, j}, M_j)^T \\ F = G_c \beta_t A_t \gamma + G_c \beta_b A_b \gamma + \alpha_E^{-1} G_{se} A_w \gamma - E_c I_{c1} w''' \\ M_{\gamma} = -\beta_E E_c I_{c1} w'' \\ M = -E_c I_{c1} w'' - E_c I_{c2} \varphi' \end{cases} \quad (41)$$

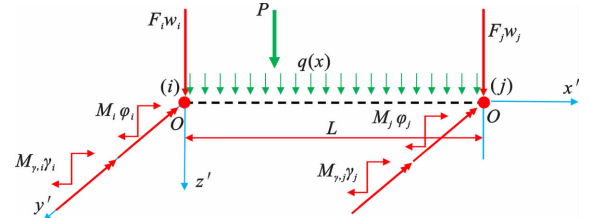


图 3 新型箱梁单元 TBTF-CSW (局部坐标系)

Fig. 3 Novel box girder beam element TBTF-CSW (local coordinate system)

式中: F 为广义位移 w 对应的广义剪力; M_γ 为广义位移 γ 对应的广义弯矩; M_φ 为广义位移 φ 对应的广义弯矩; 广义位移和广义力的正向如图 3 所示。

选用式(37)~(39)中 w 、 γ 和 φ 的齐次解构造广义位移插值函数, 根据图 3 给定的位移边界条件, 确定式中的 6 个待定系数 $C_i (i=1, 2, \dots, 6)$, 再将其代入式(37)~(39), 可得

$$\begin{cases} w = \mathbf{N}_w \boldsymbol{\delta}^e \\ \gamma = \mathbf{N}_\gamma \boldsymbol{\delta}^e \\ \varphi = \mathbf{N}_\varphi \boldsymbol{\delta}^e \end{cases} \quad (42)$$

式中: $\mathbf{N}_w$ 为广义位移 w 的形状函数; $\mathbf{N}_\gamma$ 为广义位移 γ 的形状函数; $\mathbf{N}_\varphi$ 为广义位移 φ 的形状函数。

将式(42)代入波形钢腹板组合箱梁势能 Π_p 的泛函表达式, 并由势能原理推导出有限元的求解方程, 即

$$\begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{P} \\ \mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e \\ \mathbf{K}^e = \mathbf{K}_{b1}^e + \mathbf{K}_{b2}^e + \mathbf{K}_w^e + \mathbf{K}_t^e + \mathbf{K}_b^e \\ \mathbf{K}_{b1}^e = \int_0^L E_c I_{c1} \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w'' dx \\ \mathbf{K}_{b2}^e = \int_0^L E_c I_{c2} \mathbf{N}_\varphi^T \mathbf{N}_\varphi' dx \\ \mathbf{K}_w^e = \int_0^L \alpha_E^{-1} \beta_E G_{sc} A_w \mathbf{N}_\gamma^T \mathbf{N}_\gamma dx \\ \mathbf{K}_t^e = \int_0^L G_c \beta_E \beta_t A_t \mathbf{N}_\gamma^T \mathbf{N}_\gamma dx \\ \mathbf{K}_b^e = \int_0^L G_c \beta_E \beta_b A_b \mathbf{N}_\gamma^T \mathbf{N}_\gamma dx \\ \mathbf{P} = \sum_e \mathbf{P}^e \\ \mathbf{P}^e = \int_0^L \mathbf{N}_w^T q dx + \mathbf{N}_w^T|_{x=x_j} P \end{cases} \quad (43)$$

式中: $\mathbf{K}$ 为整体结构的刚度矩阵; $\mathbf{K}^e$ 为单元的刚度矩阵; $\mathbf{a}$ 为整体结构的结点位移向量; $\mathbf{P}$ 为整体结构的等效结点荷载向量; $\mathbf{P}^e$ 为单元等效结点荷载向量。

3 算例分析

为验证本文梁单元模型在预测混凝土上、下翼缘板和波形钢腹板剪力分配方面的准确性, 选取等截面和变截面波形钢腹板组合箱梁作为研究对象, 分析不同工况下 TBTF-CSW 梁单元的计算精度与适用性。

3.1 理论验证

3.1.1 等截面波形钢腹板简支组合箱梁

某等截面波形钢腹板简支组合箱梁的结构布置如图 4 所示。梁长 50 m, 梁端设有 1.5 m 厚的混凝土端横隔板。考虑 2 种不同荷载工况: 工况 1 为跨中截面施加集中荷载 $P=500$ kN; 工况 2 为全梁范围施加均布荷载 $q=8.5$ kN $\cdot$ m $^{-1}$, 如图 4(a) 所示。箱梁截面的几何参数和波形钢腹板的尺寸参数分别如图 4(b)、(c) 所示。混凝土的弹性模量和泊松比分别为 3.45×10^4 MPa 和 0.2; 波形钢腹板的弹性模量和泊松比分别为 2.06×10^5 MPa 和 0.3。

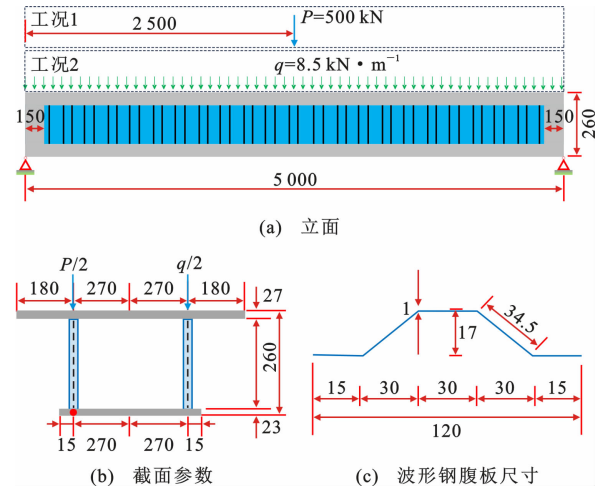
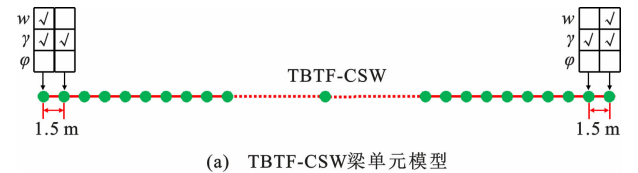


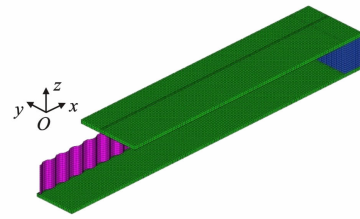
图 4 等截面波形钢腹板简支组合箱梁(单位: cm)

Fig. 4 Prismatic simply supported composite box girder with CSWs (unit: cm)

采用 TBTF-CSW 梁单元建立等截面波形钢腹板简支组合箱梁的数值分析模型, 共划分 50 个单元, 边界条件设置如图 5(a) 所示。为验证 TBTF-CSW 梁单元模型的准确性, 采用 ABAQUS/Standard 建立精细化的实体有限元模型 [Solid-FEM, 如图 5(b) 所示]。通过约束 Solid-FEM 模型



(a) TBTF-CSW 梁单元模型



(b) Solid-FEM 局部模型

图 5 波形钢腹板组合箱梁有限元模型

Fig. 5 Finite element model of composite box girder with CSWs

端部截面所有结点的竖向位移,使其边界条件与梁单元模型保持一致。混凝土翼缘板和端横隔板选用 8 节点线性非协调模式单元(C3D8I),单元数量为 8.09×10^4 ;波形钢腹板选用 4 节点一般壳单元(S4),单元数量为 8.79×10^3 。波形钢腹板与混凝土部件之间通过结点耦合方式连接。

图 6、7 分别绘制了 TBTF-CSW 梁单元模型和 Solid-FEM 模型计算得到的不同荷载工况下波形钢腹板筒支组合箱梁剪力以及上、下翼缘板和波形钢腹板承剪比例的分布曲线。考虑到结构和荷载的对称性,图中仅展示了半跨的分析结果。

由图 6、7 可见,不同荷载工况下 TBTF-CSW 梁单元模型计算得到的波形钢腹板组合箱梁剪力分布与 Solid-FEM 模型计算结果吻合较好。在靠近端横隔板位置,波形钢腹板剪切变形受到抑制,上、下翼缘板承担的剪力显著增加,而波形钢腹板承担的剪力迅速减小;TBTF-CSW 梁单元模型可以有效捕捉到这一变化趋势,与文献[25]、[26]结论一致。当远离端横隔板时,TBTF-CSW 梁单元模型计算得到的上、下翼缘板和波形钢腹板的承剪比例相对稳定,分别为 6.3%、5.1%、88.5%,而 Solid-FEM 模型因受到波形钢腹板与翼缘板连接位置周期性变化的影响,计算得到的各部分承剪比例在 TBTF-CSW 梁单元模型计算结果附近波动,但两者趋势一致。与 Solid-FEM 模型相比,TBTF-CSW 梁单元模型所需单元数量显著减少,计算效率更高。

此外,不同荷载工况下 2 种模型(TBTF-CSW 和 Solid-FEM)计算得到的波形钢腹板组合箱梁上、下翼缘板和波形钢腹板承剪比例分布曲线呈现高度一致性,仅在端横隔板和集中荷载作用区域出现局部突变。这一现象表明,等截面波形钢腹板组合箱梁的剪力分配规律主要与材料参数和截面几何特性有关,端横隔板和集中荷载会产生局部影响,进一步验证了 TBTF-CSW 梁单元模型预测波形钢腹板组合箱梁承剪比例分布的可靠性。

3.1.2 变截面波形钢腹板悬臂组合箱梁

选取文献[18]中某变截面波形钢腹板悬臂组合箱梁为分析对象,结构的具体布置如图 8 所示。梁长 30 m,梁高从悬臂端(A-A 截面)的 2 m 按线性变化至固定端(B-B 截面)的 4 m;下翼缘板厚从悬臂端的 0.3 m 按线性变化至固定端的 0.5 m。荷载的施加方式和边界条件布置如图 8(a)所示;箱梁截面的几何参数和波形钢腹板的尺寸参数分别如图

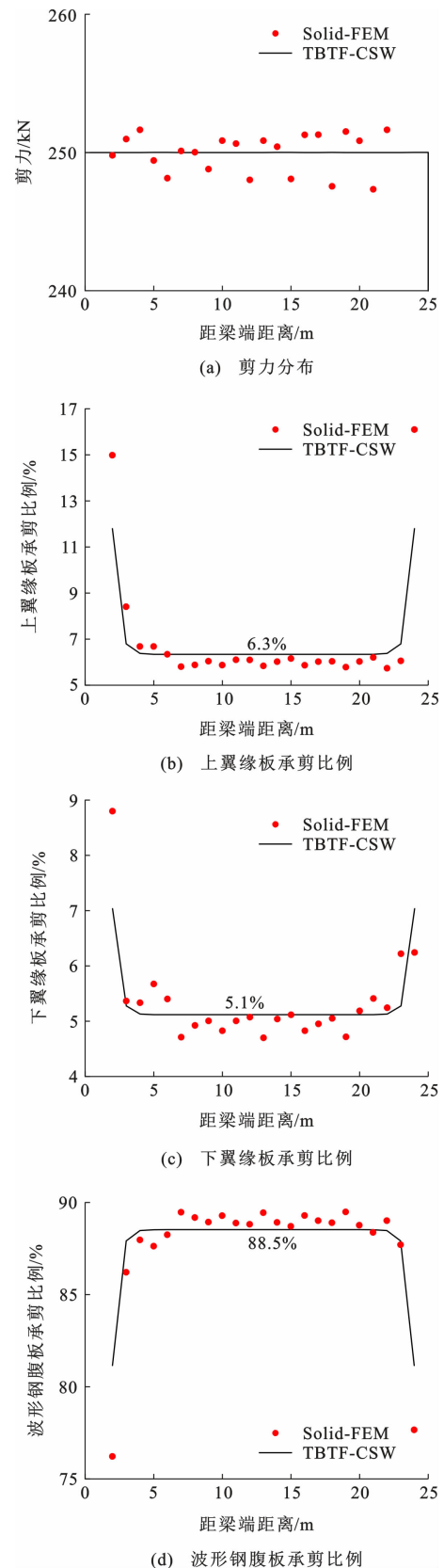


图 6 等截面波形钢腹板组合箱梁各组成部分承剪比例 (荷载工况 1)

Fig. 6 Distribution of shear force ratio in prismatic composite box girder with CSWs (loading case 1)

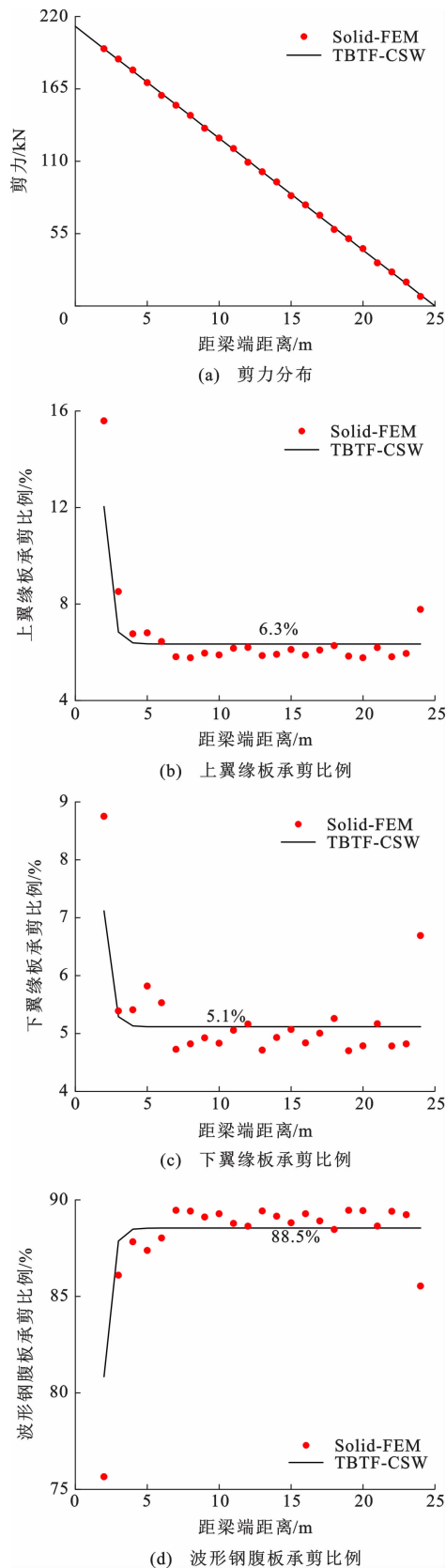


图 7 等截面波形钢腹板组合箱梁各组成部分承剪比例
(荷载工况 2)

Fig. 7 Distribution of shear force ratio in prismatic composite box girder with CSWs (loading case 2)

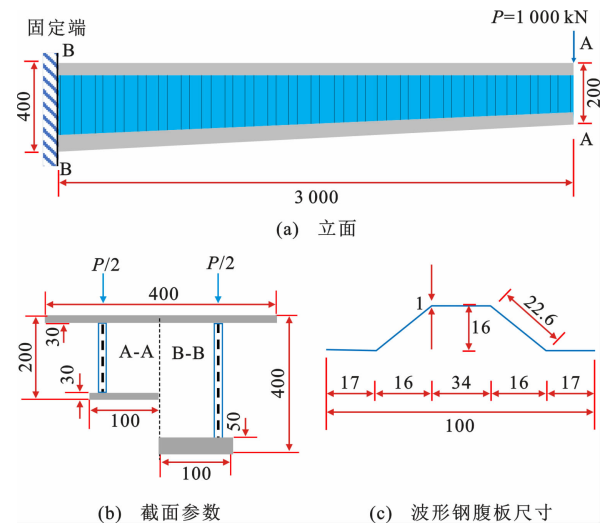


图 8 变截面波形钢腹板悬臂组合箱梁^[18](单位:cm)

Fig. 8 Tapered cantilever composite box girder with CSWs^[18] (unit: cm)

8(b)、(c)所示。混凝土的弹性模量和泊松比分别为 3.25×10^4 MPa 和 0.2; 波形钢腹板的弹性模量和泊松比分别为 2.10×10^5 MPa 和 0.3。

采用 TBTF-CSW 梁单元和 ABAQUS/Standard 分别建立变截面波形钢腹板悬臂组合箱梁的数值分析模型,如图 9 所示,并将计算得到的上、下翼缘板和波形钢腹板承剪比例的分布曲线如图 10 所示。

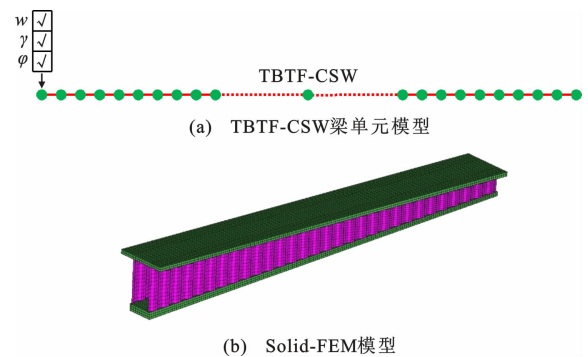


图 9 变截面波形钢腹板组合箱梁有限元模型

Fig. 9 Finite element model of tapered composite box girder with CSWs

由图 10 可见,变截面波形钢腹板悬臂组合箱梁上翼缘板和波形钢腹板的承剪比例沿悬臂端向固定端逐渐减小,而下翼缘板的承剪比例则逐渐增大。在靠近固定端区域,受边界条件影响(剪切变形受到抑制),上、下翼缘板的承剪比例出现突增,而波形钢腹板的承剪比例则迅速下降。TBTF-CSW 梁单元模型计算得到的波形钢腹板组合箱梁各组成部分承剪比例分布曲线与 Solid-FEM 模型计算结果高度一致,验证了本文梁单元模型的可靠性与适用性。

为进一步说明 TBTF-CSW 梁单元模型的计算

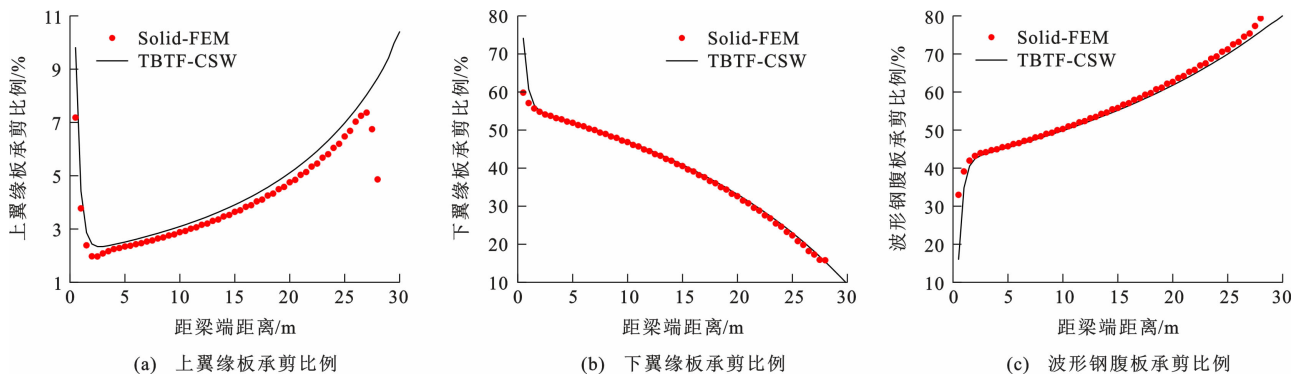


图 10 变截面波形钢腹板组合箱梁各部分承剪比例

Fig. 10 Distribution of shear force ratio in tapered composite box girder with CSWs

精度,选取距悬臂梁固定端 1、5、10、15、20、25、29 m 处的截面作为分析截面。提取 TBTF-CSW 梁单元模型和 Solid-FEM 模型计算得到的波形钢腹板剪应力,并与文献[18]中采用剩余剪力法(RSFM1 和 RSFM2)、变截面解析公式(VCF)以及有限元模型(FEM)的结果进行对比见表 1。

表 1 变截面波形钢腹板剪应力

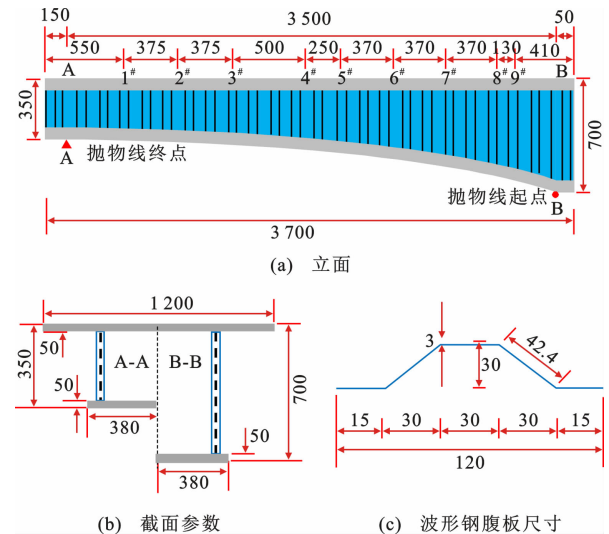
Table 1 Shear stress in tapered CSWs MPa

x/m	TBTF-CSW	Solid-FEM	VCF ^[18]	RSFM1 ^[18]	RSFM2 ^[18]	FEM ^[18]
1	5.63	6.21	7.85	7.79	7.04	7.23
5	7.92	7.81				
10	9.70	9.59	10.10	10.73	9.60	9.46
15	12.14	12.05				
20	15.62	15.59	15.79	16.55	14.58	15.30
25	20.83	20.92				
29	27.09	29.85	27.06	27.26	23.51	26.72

由表 1 可见,在距固定端和悬臂端 1 m 的位置,由于受位移边界约束和集中荷载影响,不同分析方法计算得到的波形钢腹板剪应力存在一定差异。而在远离上述边界区域,TBTF-CSW 梁单元模型计算得到的波形钢腹板剪应力与 Solid-FEM 模型以及文献[18]中提供的有限元数值结果之间误差均在 2% 以内,表明本文梁单元模型在变截面波形钢腹板剪应力计算方面具有较高的预测精度。

3.2 扩展算例分析

为进一步验证 TBTF-CSW 梁单元的适用性,选取文献[21]中的变截面波形钢腹板-UHPC 组合试验梁作为扩展算例,其结构布置如图 11 所示。试验梁分析长度为 3 700 mm,两端设有混凝土横隔板,变截面段长度为 3 500 mm,梁高由悬臂端(A-A 截面,对应抛物线终点)的 350 mm 按二次抛物线变

图 11 变截面波形钢腹板-UHPC 试验梁^[21](单位:mm)Fig. 11 Tapered cantilever test specimen with CSWs and UHPC flanges^[21] (unit: mm)

化至根部(B-B 截面,对应抛物线起点)的 700 mm;下翼缘板厚度为 50 mm,沿轴向保持不变。箱梁截面的几何参数和波形钢腹板的尺寸参数分别如图 11(b)、(c) 所示。波形钢腹板采用 Q355 钢材,UHPC 材料的弹性模量为 5.125×10^4 MPa。

采用 TBTF-CSW 梁单元与 ABAQUS/Standard 分别建立变截面波形钢腹板-UHPC 试验梁的数值分析模型(图 12),并选取文献[21]中设置的 2 种荷载工况(分别记为工况 1 和工况 2,见图 13)进行分析。

图 14、15 分别绘制了在工况 1 和工况 2 条件下,TBTF-CSW 梁单元模型和 Solid-FEM 模型计算所得波形钢腹板的剪应力以及上、下翼缘板和波形钢腹板的承剪比例,并将结果与文献[21]中提供的 FEM 计算值、变截面理论解以及试验梁分析截面[截面 1[#]~9[#],见图 11(a)]的实测数据进行了

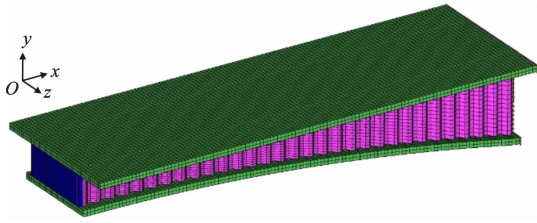


图 12 变截面波形钢腹板-UHPC 组合试验梁模型(Solid-FEM)

Fig. 12 Solid-FEM Model of tapered cantilever test specimen with CSWs and UHPC flanges

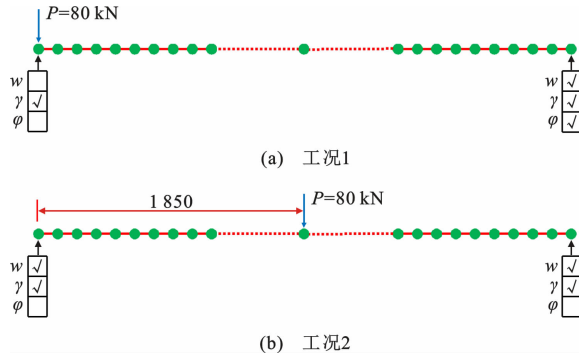


图 13 分析工况(单位:mm)

Fig. 13 Working conditions (unit: mm)

对比。

由图 14、15 可见, TBTF-CSW 梁单元模型在不同工况下计算得到的波形钢腹板剪应力以及上、下翼缘板和波形钢腹板的承剪比例与 Solid-FEM 模型结果、文献[21]提供的试验数据高度吻合, 验证了 TBTF-CSW 梁单元模型在剪应力和剪力分配计算方面的精度与适用性。相较于文献[21]中提出的变截面理论计算方法, TBTF-CSW 梁单元不仅能够精确预测波形钢腹板的承剪比例, 还可实现对上、下翼缘板剪力的有效分离, 且计算结果与 Solid-FEM 保持高度一致, 进一步体现了其良好的计算优势。

值得注意的是, 在工况 1 条件下, 受端横隔板约束的影响, 上、下翼缘板和波形钢腹板的承剪比例发生明显突变, 局部位置出现了波形钢腹板承担的剪力由负转正, 下翼缘板承担的剪力超过截面总剪力的“剪力超分配”现象。而在工况 2 条件下, 变截面波形钢腹板简支箱梁右侧区域出现了下翼缘板剪力与截面总剪力方向相反, 波形钢腹板所承担的剪力超过截面总剪力的“剪力超分配”现象。结果表明, 传统理论中“截面剪力由波形钢腹板承担属于保守计算”的假设在变截面条件下可能失效, 下翼缘板和波形钢腹板均可能出现“剪力超分配”的现象, 需要引起足够重视。TBTF-CSW 梁单元模型能够准确预测到“剪力超分配”现象, 进一步展示了其在分析

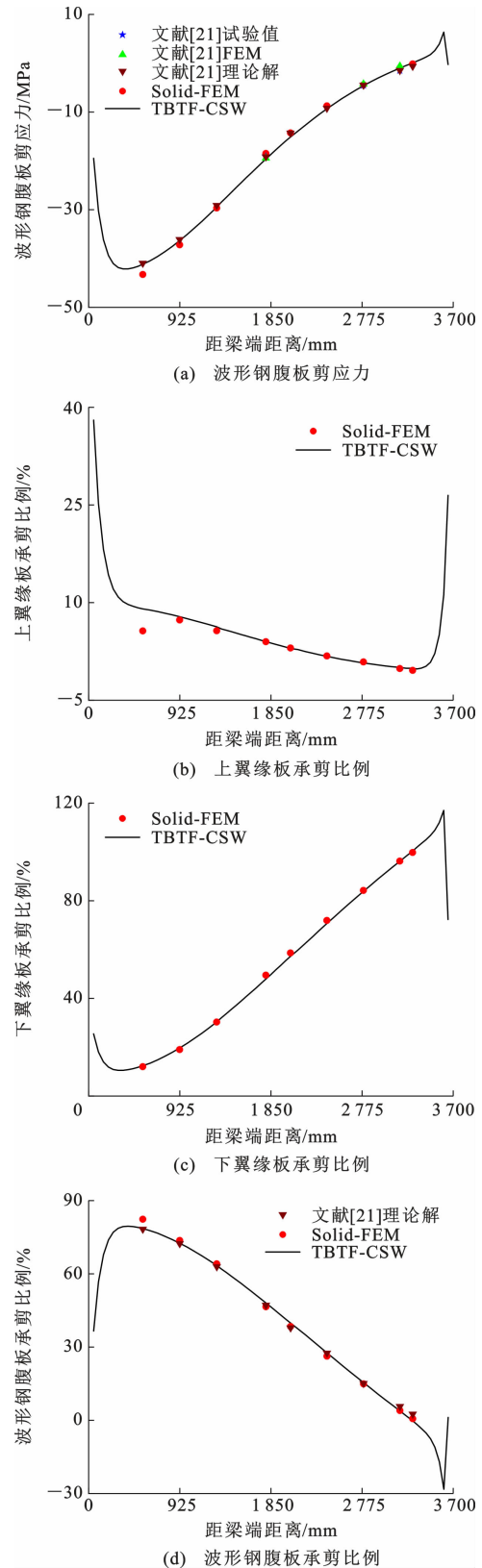


图 14 变截面波形钢腹板悬臂组合箱梁剪应力及承剪比例分布(工况 1)

Fig. 14 Distribution of shear stress and shear force ratio in tapered cantilever composite box girder with CSWs (working condition case 1)

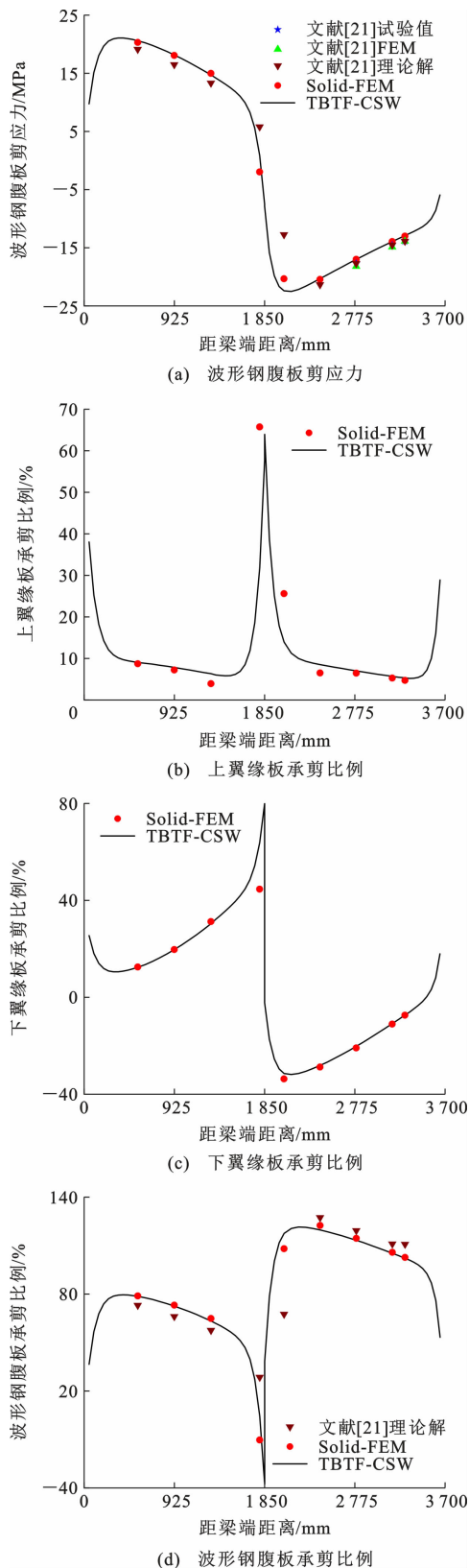


图 15 变截面波形钢腹板筒支组合箱梁剪应力及承剪比例分布(工况 2)

Fig. 15 Distribution of shear stress and shear force ratio in tapered simply supported composite box girder with CSWs (working condition case 2)

变截面波形钢腹板组合箱梁剪力分配中的适用性与可靠性。

4 结 语

(1)引入上、下翼缘板的剪应变传递系数,建立了翼缘板剪力与波形钢腹板剪应变之间的数学关系,实现了组合箱梁各组成部分剪力的有效分离。在此基础上考虑变截面效应,推导了适用于变截面波形钢腹板组合箱梁翼缘板及腹板剪力的修正计算表达式,完善了相关剪力分析理论。

(2)基于能量变分原理与有限元方法,构建了一种可同时考虑上、下翼缘板与波形钢腹板剪切变形以及横隔板约束影响的两节点六自由度箱梁单元(TBTF-CSW),有效提升了组合箱梁剪力分析的理论精度与适用范围。

(3)通过算例分析验证了 TBTF-CSW 梁单元在等截面与变截面波形钢腹板组合箱梁剪力分配计算中的准确性与适用性。与实体有限元模型相比, TBTF-CSW 梁单元在保证计算精度的同时,显著降低了建模复杂度与计算成本,展现出良好的工程适用性和计算效率。

(4)在等截面波形钢腹板组合箱梁中,波形钢腹板承担主要剪力,其分担比例主要取决于材料性能和截面几何参数,端横隔板与集中荷载可引起局部突变;而在变截面条件下,受下翼缘板轴力的影响,变截面效应显著增强,下翼缘板与波形钢腹板均可能出现“剪力超分配”现象,此时采用“腹板承担全部剪力”的传统假设将偏于不安全。本文提出的 TBTF-CSW 梁单元可为波形钢腹板组合箱梁的剪力分配理论分析与工程设计提供有效支撑。

参考文献:

References:

- [1] MO Y L, JENG C H, KRAWINKLER H. Experimental and analytical studies of innovative prestressed concrete box-girder bridges[J]. Materials and Structures, 2003, 36(2): 99-107.
- [2] HE J, LIU Y Q, CHEN A R, et al. Mechanical behavior and analysis of composite bridges with corrugated steel webs: State-of-the-art[J]. International Journal of Steel Structures, 2012, 12(3): 321-338.
- [3] 聂建国,陶慕轩,吴丽丽,等. 钢-混凝土组合结构桥梁研究新进展[J]. 土木工程学报, 2012, 45(6): 110-122.
NIE Jian-guo, TAO Mu-xuan, WU Li-li, et al. Advances of research on steel-concrete composite bridges[J]. China Civil Engineering Journal, 2012, 45(6): 110-122.

- [4] JIANG R J, KWONG AU F T, XIAO Y F. Prestressed concrete girder bridges with corrugated steel webs: Review [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2015, 141(2): 04014108.
- [5] 张 峰, 李术才, 李宏江, 等. 波形钢腹板内衬混凝土部位抗剪性能[J]. *交通运输工程学报*, 2016, 16(1): 16-24.
ZHANG Feng, LI Shu-cai, LI Hong-jiang, et al. Shearing performances of corrugated steel webs encased with concrete [J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2016, 16(1): 16-24.
- [6] 李宏江, 叶见曙, 万 水, 等. 剪切变形对波形钢腹板箱梁挠度的影响[J]. *交通运输工程学报*, 2002, 2(4): 17-20.
LI Hong-jiang, YE Jian-shu, WAN Shui, et al. Influence of shear deformation on deflection of box girder with corrugated steel webs [J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2002, 2(4): 17-20.
- [7] 聂建国, 李法雄. 考虑腹板剪切行为的波形钢腹板梁理论模型 [J]. *中国公路学报*, 2011, 24(6): 40-48.
NIE Jian-guo, LI Fa-xiong. Theory model of corrugated steel web girder considering web shear behavior [J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2011, 24(6): 40-48.
- [8] 李夏元, 万 水, 付理想, 等. 一种考虑波形钢腹板等效剪切变形自由度的新型箱梁单元 [J]. *交通运输工程学报*, 2025, 25(5): 385-398.
LI Xia-yuan, WAN Shui, FU Li-xiang, et al. A novel box girder beam element considering equivalent shear deformation freedom of corrugated steel webs [J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2025, 25(5): 385-398.
- [9] 李宏江, 叶见曙, 万 水, 等. 波形钢腹板预应力混凝土箱梁的试验研究 [J]. *中国公路学报*, 2004, 17(4): 31-36.
LI Hong-jiang, YE Jian-shu, WAN Shui, et al. Experimental research on prestressed concrete box girder with corrugated steel webs [J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2004, 17(4): 31-36.
- [10] 周绪红, 孔祥福, 侯 健, 等. 波纹钢腹板组合箱梁的抗剪受力性能 [J]. *中国公路学报*, 2007, 20(2): 77-82.
ZHOU Xu-hong, KONG Xiang-fu, HOU Jian, et al. Shear mechanical property of composite box girder with corrugated steel webs [J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2007, 20(2): 77-82.
- [11] 狄 谨, 周绪红, 孔祥福, 等. 波形钢腹板预应力混凝土组合箱梁试验 [J]. *长安大学学报(自然科学版)*, 2009, 29(5): 64-70.
DI Jin, ZHOU Xu-hong, KONG Xiang-fu, et al. Experimental research on pre-stressed concrete composite box girders with corrugated steel webs [J]. *Journal of Chang'an University (Natural Science Edition)*, 2009, 29(5): 64-70.
- [12] 李立峰, 刘志才, 王 芳. 波形钢腹板组合箱梁弹性阶段弯曲理论及模型试验研究 [J]. *公路交通科技*, 2008, 25(1): 69-73, 78.
LI Li-feng, LIU Zhi-cai, WANG Fang. Research on flexure theory at elastic stage and model test of composite box-girder with corrugated steel webs [J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2008, 25(1): 69-73, 78.
- [13] 张元海, 李 乔. 变截面梁的应力计算及其分布规律研究 [J]. *工程力学*, 2007, 24(3): 78-82.
ZHANG Yuan-hai, LI Qiao. Stress calculation and stress distribution analysis of non-uniform beams [J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(3): 78-82.
- [14] 苏 俭, 刘 钊. 变截面波形钢腹板组合箱梁剪应力计算及分布规律研究 [J]. *结构工程师*, 2010, 26(6): 32-36.
SU Jian, LIU Zhao. Shear stress calculation and distribution in non-prismatic box beams with corrugated steel webs [J]. *Structural Engineers*, 2010, 26(6): 32-36.
- [15] 李准华, 董 萌, 崔 冰. 考虑混凝土承剪和变截面效应的波纹钢腹板剪应力计算 [J]. *土木工程学报*, 2012, 45(2): 85-89.
LI Zhun-hua, DONG Meng, CUI Bing. Calculation of shear stress for corrugated steel webs by considering concrete shear capability and effect of variable cross section [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2012, 45(2): 85-89.
- [16] 李 杰, 武海鹏, 陈 淮. 波形钢腹板变截面连续体系梁桥钢腹板承剪分析 [J]. *桥梁建设*, 2015, 45(1): 79-84.
LI Jie, WU Hai-peng, CHEN Huai. Analysis of steel web shear capacity of variable section continuous system composite box beam bridge with corrugated steel webs [J]. *Bridge Construction*, 2015, 45(1): 79-84.
- [17] 李 杰, 武海鹏, 陈 淮. 变截面波形钢腹板组合箱梁腹板剪应力实用计算方法研究 [J]. *铁道科学与工程学报*, 2017, 14(1): 80-86.
LI Jie, WU Hai-peng, CHEN Huai. Research on practical shear stress calculation of variable cross-section composited box-girder with corrugated steel webs [J]. *Journal of Railway Science and Engineering*, 2017, 14(1): 80-86.
- [18] ZHOU M, ZHANG J D, ZHONG J T, et al. Shear stress calculation and distribution in variable cross sections of box girders with corrugated steel webs [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2016, 142(6): 04016022.
- [19] ZHOU M, LIU Z, ZHANG J D, et al. Stress analysis of linear elastic nonprismatic concrete-encased beams with corrugated steel webs [J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2017, 22(6): 04017012.
- [20] ZHOU M, LIAO J C, AN L. Shear properties of tapered box girders with steel trapezoidally corrugated webs considering resal effect [J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2020, 25(1): 04019126.
- [21] 李立峰, 蒋启昊, 王连华, 等. 变截面波形钢腹板-UHPC 组合箱梁剪应力试验 [J]. *中国公路学报*, 2023, 36(5): 150-162.
LI Li-feng, JIANG Qi-hao, WANG Lian-hua, et al. Shear stress test of non-prismatic composite box girders with corrugated steel webs and UHPC [J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2023, 36(5): 150-162.
- [22] SHIRATANI H, IKEDA H, IMAI Y, et al. Flexural and shear behavior of composite bridge girder with corrugated steel webs around middle support [J]. *Doboku Gakkai Ronbunshu*, 2003, 2003(724): 49-67.

- [23] ZHANG Y, LIU Y Q, WANG S H, et al. Concrete additional stress near intermediate support for composite girder bridges with corrugated steel webs[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2022, 27(3): 04021112.
- [24] 张 愉,张 云,罗婷倚,等.波形钢腹板简支组合梁桥梁端混凝土附加应力[J]. *结构工程师*,2022,38(5):1-7.
ZHANG Yu, ZHANG Yun, LUO Ting-yi, et al. Additional stress of concrete slabs near supports of simply-supported composite girder bridges with corrugated steel webs[J]. *Structural Engineers*, 2022, 38(5): 1-7.
- [25] CHAI J L, ZHOU M, ZHANG Y F. Modified calculation on shear stress of girder bridges with corrugated steel webs[J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2024, 221: 108878.
- [26] CHAI J L, ZHOU M, ZHANG Y F. Analysis of influential factors on additional shear force induced by shear deformation in girder bridges with corrugated steel webs[J]. *Thin-walled Structures*, 2024, 204: 112358.
- [27] ZHOU M, LIU Z, ZHANG J D, et al. Equivalent computational models and deflection calculation methods of box girders with corrugated steel webs[J]. *Engineering Structures*, 2016, 127: 615-634.
- [28] 李夏元,周 满,童金虎,等.考虑横隔板刚度影响的波形钢腹板组合箱梁畸变效应研究[J]. *交通运输工程学报*,2026,26(5):125-138.
LI Xia-yuan, ZHOU Man, TONG Jin-hu, et al. Influence of diaphragm stiffness on distortional behavior of composite box girder with corrugated steel webs[J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2026, 26(5): 125-138
- [29] LI X Y, WAN S, ZHANG Y H, et al. Beam finite element for thin-walled box girders considering shear lag and shear deformation effects[J]. *Engineering Structures*, 2021, 233, 111867.