

文章编号:1671-1637(2026)05-0111-14

考虑剪切变形的钢-混组合梁时变分析的 精确有限元法

邓继华^{*1,2}, 何子谕¹, 贺君¹, 邵旭东³

(1. 长沙理工大学土木与环境工程学院, 湖南长沙 410114; 2. 长沙理工大学桥梁工程安全控制教育部重点实验室, 湖南长沙 410114; 3. 湖南大学土木工程学院, 湖南长沙 410082)

摘要:为了改善传统位移型有限元方法在分析钢-混组合梁长期力学行为时易产生的曲率闭锁问题,提高计算精度和效率,提出了一种同时考虑双层梁界面滑移效应、梁层剪切变形以及混凝土收缩与徐变影响的钢-混组合梁精确有限元法。基于弹性力学基本方程,结合混凝土线性黏弹性徐变本构模型,推导得到了组合梁单元的控制微分方程并进行了解析求解;采用直接刚度法进一步推导得到了组合梁的精确单元刚度矩阵和等效荷载矩阵,并开发了相应的数值计算程序;通过3个典型算例对所提出的方法进行了验证,并开展了参数分析。分析结果表明:提出的有限元法在同时考虑梁层剪切变形和界面滑移影响的情况下,能够准确预测钢-混组合梁的时变力学响应,即使在单元划分数量较少、收缩与徐变分析时间步数较小的条件下,仍可获得较高精度的计算结果;与解析法相比,365 d的挠度误差不超过3.2%,但计算效率和通用性大大提升;与不考虑剪切效应的有限元法相比,误差减小了10%以上。该方法可为钢-混组合梁长期性能分析及工程设计提供一种高效、可靠的计算手段。

关键词:桥梁工程;钢-混组合梁;精确有限元;收缩与徐变;剪切变形;直接刚度法

中图分类号:U448.21 **文献标志码:**A **DOI:**10.19818/j.cnki.1671-1637.2026.095

Exact finite element method for time-dependent analysis of steel-concrete composite beam considering shear deformation

DENG Ji-hua^{*1,2}, HE Zi-an¹, HE Jun¹, SHAO Xu-dong³

(1. School of Civil and Environmental Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, Hunan, China; 2. Key Laboratory of Safety Control of Bridge Engineering of Ministry of Education, Changsha University of Science & Technology, Changsha 410114, Hunan, China; 3. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, Hunan, China)

Abstract: To overcome curvature locking in conventional displacement-based finite element methods for analyzing the long-term mechanical behavior of steel-concrete composite beams, and to improve computational accuracy and efficiency, an exact finite element method that accounts for interfacial slip between the two beam layers, shear deformation of beam layers, and the effects of concrete shrinkage

出版历程:2025-03-27 收稿,2025-09-21 修回,2025-11-27 录用

基金项目:国家自然科学基金项目(52278142);湖南省自然科学基金项目(2023JJ30019);桥梁结构健康与安全国家重点实验室开放基金项目(BHSL21-06-GF)

***作者简介:**邓继华(1975-),男,湖南冷水江人,教授,博士生导师,工学博士,E-mail:jihuadeng@csust.edu.cn.

引用格式:邓继华,何子谕,贺君,等.考虑剪切变形的钢-混组合梁时变分析的精确有限元法[J].交通运输工程学报,2026,26(5):111-124.

Citation: DENG Ji-hua, HE Zi-an, HE Jun, et al. Exact finite element method for time-dependent analysis of steel-concrete composite beam considering shear deformation[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2026, 26(5): 111-124.

and creep was proposed. Based on the fundamental equations of elasticity and a linear viscoelastic constitutive model for concrete creep, the governing differential equations for the composite beam element were derived and solved analytically. The exact element stiffness matrix and equivalent load matrix were formulated using the direct stiffness method, and a corresponding numerical program was developed. The proposed method was validated using three representative examples, followed by a parametric study. The results indicate that the proposed finite element method can accurately predict the time-dependent mechanical response of steel-concrete composite beams while accounting for both shear deformation and interfacial slip. High accuracy can still be achieved with a relatively coarse mesh and a limited number of time steps in shrinkage and creep analysis. Compared with the analytical solution, the error in deflection at 365 d is less than 3.2%, while the computational efficiency and applicability are significantly improved. In comparison with a finite element method that neglects shear deformation, the proposed method reduces the error by more than 10%. The proposed method therefore provides an efficient and reliable computational tool for the long-term performance analysis and engineering design of steel-concrete composite beams.

Keywords: bridge engineering; steel-concrete composite beam; exact finite element; shrinkage and creep; shear deformation; direct stiffness method

Publication history: Received 2025-03-27; Received in revised form 2025-09-21; Accepted 2025-11-27

Funding: National Natural Science Foundation of China (52278142); Natural Science Foundation of Hunan Province (2023JJ30019); Open Fund of the State Key Laboratory of Bridge Structure Health and Safety (BHSKL21-06-GF)

* **Corresponding author:** DENG Ji-hua, professor, PhD, E-mail: jihudeng@csust.edu.cn.

0 引 言

由 2 个或多个不同材料和截面形式的梁层形成的组合梁,具有优越的力学和构造性能,作为 2 层组合梁里最具代表性的钢-混组合梁,国内外学者对其进行了广泛而深入的研究,在建筑与桥梁中得到了广泛的应用^[1-2]。

组合梁中相邻梁层之间剪力连接件的柔性使得梁层之间为部分作用而非完全作用^[3],进行组合梁力学分析时必须考虑界面滑移既是其区别于其他单层梁结构的显著特点,同时也是其难点,如仍采用构造低阶梁单元方法,即梁层单元内部轴向位移场采用一次插值函数,横向位移场采用三次插值函数来构造组合梁单元,在连接件抗剪刚度趋向于无穷大时会出现所谓的滑移或曲率闭锁^[4],对此有文献分别采用增设内部节点^[4]或内部自由度^[4-5]的方法,虽能有效解决,但又带来在常规位移有限元程序中实施不方便,即通用性较差的问题^[6]。为解决此问题,很多学者开展了相关研究,到目前为止,主要有以下 3 种方法:一是采用单元应变^[7]、力^[8]或多个变量混合^[9]代替位移变量进行插值的方法构建组合梁分析的单元模型;二是采用常用于分析无界面滑移效应层合梁的高阶剪切变

形理论^[10]构建高阶组合梁单元模型^[11];三是直接从弹性力学基本微分方程出发,建立以位移及滑移为未知量的微分控制方程,推导出内力与位移基于微分方程的解析解,再推导出所谓的“精确”组合梁单元刚度矩阵,该方法可称为直接刚度法^[12]。相对于前 2 种方法而言,第 3 种方法能从源头上避免由于采用各种假设的形函数近似模拟变量场而可能带来的滑移、曲率闭锁问题,同时也避免了由于增设内部节点或自由度而不方便在常规位移有限元程序中实施的问题。采用直接刚度法,并基于 Euler-Bernoulli 梁理论或 Timoshenko 梁理论,国内外学者开展了各种组合梁单元模型线性^[6,13-17]与非线性^[18-20]的研究。

在以钢-混组合梁为代表的 2 层组合梁里,混凝土的收缩与徐变对两层组合梁受力性能的影响是重点研究内容。对于混凝土的收缩与徐变,已有试验和理论研究表明^[21-22],不管是承受正弯矩还是负弯矩的组合梁,收缩与徐变对其应力、内力、变形等长期受力性能均有重要影响,国内外学者基于各种有限元模型对组合梁的收缩与徐变进行了深入研究^[23-24],这其中由于收缩与徐变应变涉及到整个分析时间段内应力的变化,对它的计算分析目前主要有单步代数法和直接积分法^[24],前者是应用积分中

值定理计算徐变模型中的卷积,不依赖于结构的应力历史,因此计算效率较高但精度较低;后者是将时间轴分为多个时间段,在每一个时间段内采用梯形或中点规则进行数值积分,相对于前一种方法而言该方法精度较高,其缺点是需存储结构的应力历史,但该缺点随着目前计算机软硬件技术的发展已经变得不太重要。鉴于收缩与徐变对组合梁受力性能有明显影响,目前的研究已经延伸到曲线钢-混组合梁桥^[25-26]以及组合梁的 2 个梁层均考虑收缩与徐变(甚至还包括连接界面)^[27]。

对 2 层组合梁考虑梁层剪切效应是一个逐步重视和提高的过程,Murakami^[28]在研究界面滑移对具有分布式黏结的组合梁刚度退化影响时首次考虑了组合梁的剪切效应。Ranzi 等^[29]将混凝土板视为 Euler-Bernoulli 梁,将钢梁视为 Timoshenko 梁,并进一步将混凝土板与钢梁均视为 Timoshenko 梁开展了研究^[30]。Areiza-Hurtado 等^[31]在进行部分作用组合梁的动力与屈曲分析时将每个梁层均视为 Timoshenko 梁,但每个梁层强制转角相同。Nguyen 等^[6]除将每个梁层均视为 Timoshenko 梁以外,也并不强制每个梁层的转角必须相同,显然这更符合组合梁的实际运动。从不考虑和考虑剪切变形的结果比较来看,对于细长梁,两者差别不大,对于短梁,特别是剪弯比和跨高比达到一定界限值时,两者结果有一定的差别^[32];相对而言,不考虑和考虑剪切变形对组合梁横向位移的影响要大于界面滑移,与试验结果比较来看,考虑剪切变形得到的组合梁跨中位移计算值与试验值明显比不考虑剪切变形时要接近些^[6],在 2 层组合梁的动力^[33-34]、屈曲^[35]分析时也可得到类似的结论。

综上所述,基于微分方程进行求解的直接刚度法是建立组合梁单元模型的有效方法,收缩与徐变和梁层剪切效应又是影响组合梁受力性能的重要因素,研究成果均比较多,但就笔者所知,目前基于直接刚度法的研究文献都是将收缩与徐变与梁层剪切效应分开单独考虑,或是基于 Euler-Bernoulli 梁理论研究收缩与徐变,没有考虑梁层剪切效应^[27,36];或是基于 Timoshenko 梁理论只考虑梁层剪切效应,而未研究收缩与徐变^[6,14]。

鉴于此,本文采用直接刚度法研究建立一个能综合考虑两层组合梁剪切效应、界面滑移以及混凝土层时变效应的精确有限元分析方法。通过将求解时间域划分成多个时间步,并将混凝土与龄期相关的线性黏弹性徐变模型以及混凝土收缩考虑进具有时间离散形式特点的本构方程,并结合弹性力学平衡方程、

几何方程建立每一时步以界面相互作用力为变量的控制微分方程,基于所得的解析解逐步得到单元内力以及位移的显式表达式,再利用直接刚度法得到组合梁单元在任一时刻具有“空间精确、时间离散”^[36]特征的单元刚度矩阵和节点力矩阵。根据上述算法研制出程序,对 3 个钢-混组合梁算例进行了计算分析,在得到已有文献结果验证的基础上,研究了梁层剪切效应对钢-混组合梁长期受力性能的影响。

1 组合梁力学方程

1.1 基本假设

- (1)各梁层截面变形前、后均为平面,但考虑剪切变形,变形后截面与梁轴线不再垂直。
- (2)梁层横向位移 v 相同,轴向位移 u 和转角 θ 由于滑移和剪切变形互不相同,不考虑掀起。
- (3)离散的剪力连接件用连续界面黏结滑移模型模拟。
- (4)混凝土徐变应变与应力呈线性关系,可基于线性黏弹性徐变理论采用叠加原理计算。

1.2 平衡方程

如图 1 所示为钢-混组合梁的一个微段,根据其受力平衡,并考虑到混凝土梁层收缩与徐变等时变效应,有

$$\begin{cases} \partial_x N_c(x, t) + D_{sc}(x, t) = 0 \\ \partial_x N_s(x, t) - D_{sc}(x, t) = 0 \\ \partial_x T_c(x, t) + V_{sc}(x, t) + p_0 = 0 \\ \partial_x T_s(x, t) - V_{sc}(x, t) = 0 \\ \partial_x M_i(x, t) - T_i(x, t) + H_i D_{sc}(x, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $N_i(x, t)$ 、 $M_i(x, t)$ 、 $T_i(x, t)$ 分别为 t 时刻关于距离梁左端 x 位置的轴力、剪力和弯矩函数, $i=c, s$,其中 c 和 s 分别代表混凝土梁和钢梁; H_i 为相应梁层截面形心轴与结合面间的距离; p_0 为作用在梁顶的均

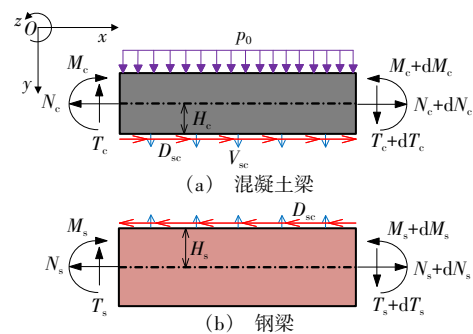


图 1 钢-混组合梁微段受力状态

Fig. 1 Stress state of an infinitesimal segment of a steel-concrete composite beam

布荷载; $D_{sc}(x, t)$ 为结合面间在 t 时刻关于距离梁左端 x 位置的剪力; $V_{sc}(x, t)$ 为结合面上 2 个梁层之间的竖向挤压力。

1.3 几何方程

图 2 所示为钢-混组合梁运动示意。依据前述基本假定可知各梁层截面的轴向应变 ϵ_i 、转角 θ_i 以及曲率 κ_i 与轴向位移 u_i 、横向位移 v 的关系, 有

$$\begin{cases} \epsilon_i = \partial_x u_i \\ \gamma_i = \partial_x v + \theta_i \\ \kappa_i = \partial_x \theta_i \end{cases} \quad (2)$$

层间滑移 d_{sc} 关系式如下

$$d_{sc} = u_s - u_c - H_s \theta_s - H_c \theta_c \quad (3)$$

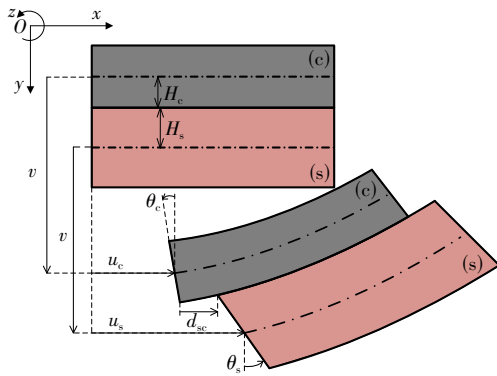


图 2 钢-混组合梁微段变形

Fig. 2 Deformation of an infinitesimal segment of a steel-concrete composite beam

1.4 本构方程

1.4.1 混凝土梁层

在考虑收缩与徐变效应情况下, 混凝土梁层的总应变 $\epsilon_c(t)$ 由 3 项组成

$$\epsilon_c(t) = \epsilon_{el}(t) + \epsilon_{sh}(t) + \epsilon_{cp}(t) \quad (4)$$

式中: $\epsilon_{el}(t)$ 为瞬时弹性应变; $\epsilon_{sh}(t)$ 、 $\epsilon_{cp}(t)$ 分别为收缩应变和徐变应变。

依据前述假定(4), 总应变 $\epsilon_c(t)$ 可以用 Volterra 积分方程表示, 有

$$\epsilon_c(t) = \epsilon_{sh}(t) + A \sigma_c(t_1) J(t, t_1) + \int_{t_1}^t J(t, \tau) A d\sigma(\tau) \quad (5)$$

$$\begin{cases} \epsilon_c(t) = (\epsilon_c(t), \gamma_c(t))^T \\ \epsilon_{sh}(t) = (\epsilon_{sh}(t), \gamma_{sh}(t))^T \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2(1 + \nu_c) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_c(t_1) = (\sigma_c(t_1), \tau_c(t_1))^T$$

式中: γ_c 与 γ_{sh} 分别为竖向的总剪应变和收缩剪应

变; t_1 为混凝土初始龄期; ν_c 为混凝土的泊松比; $\sigma_c(t_1)$ 、 $\tau_c(t_1)$ 分别为初始弹性阶段的正应力与剪应力; $J(t, \tau)$ 为徐变函数, 表示龄期为 τ 的混凝土受到单位应力持续作用, 在 t 时刻产生的徐变应变。

对于目前采用的徐变函数 $J(t, \tau)$, 式(5)中积分项不易直接求解得到显式表达, 将时间域分为 n 个时刻, 且 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 也就形成了 $n-1$ 个时段(各时段长可各不相同), 基于梯形法则将式(5)转换为

$$\begin{aligned} \epsilon_c^{(n)} &= \epsilon_{sh}^{(n)} + A \sigma_c^{(1)} J_{n,1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (J_{n,i+1} + J_{n,i}) \cdot A (\sigma_c^{(i+1)} - \sigma_c^{(i)}) \\ \epsilon_c^{(i)} &= \epsilon_c(t_i) \\ \sigma_c^{(i)} &= \sigma_c(t_i) \\ J_{i,j} &= J(t_i, t_j) \end{aligned} \quad (6)$$

式中: 各个变量右上角的 (i) 代表这是该变量在第 t_i 时刻的函数, 该规则全文通用。

进一步转换式(6), 将其变成具有时间离散形式特点的各时刻混凝土本构方程, 有

$$\begin{aligned} A \sigma_c^{(n)} &= E_c^{(n)} (\epsilon_c^{(n)} - \epsilon_{sh}^{(n)}) + \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} A \sigma_c^{(i)} \quad (7) \\ \Psi_{n,i} &= \begin{cases} \frac{J_{n,2} - J_{n,1}}{J_{n,n} + J_{n,n-1}} & i = 1 \\ \frac{J_{n,i+1} - J_{n,i-1}}{J_{n,n} + J_{n,n-1}} & i > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

式中: $E_c^{(n)} = 2 / (J_{n,n} + J_{n,n-1})$ 为混凝土考虑老化后的弹性模量。

故混凝土梁层在 t_n 时刻的本构关系

$$\begin{cases} N_c^{(n)} = \int_{A_c} \sigma_c^{(n)} dA = (EA)_c^{(n)} \epsilon_c^{(n)} - (EA)_c^{(n)} \epsilon_{sh}^{(n)} + (EB)_c^{(n)} \kappa_c^{(n)} + N_c \\ M_c^{(n)} = \int_{A_c} z_c \sigma_c^{(n)} dA = (EB)_c^{(n)} \epsilon_c^{(n)} - (EB)_c^{(n)} \epsilon_{sh}^{(n)} + (EI)_c^{(n)} \kappa_c^{(n)} + M_c \\ T_c^{(n)} = \int_{A_c} \tau_c^{(n)} dA = k_c^s (GA)_c^{(n)} (\gamma_c^{(n)} - \gamma_{sh}^{(n)}) + T_c \end{cases} \quad (8)$$

$$N_c = \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} N_c^{(i)}$$

$$M_c = \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} M_c^{(i)}$$

$$T_c = \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} T_c^{(i)}$$

式中: $(EA)_c^{(n)} = E_c^{(n)} A_c$; $(EB)_c^{(n)} = E_c^{(n)} B_c$; $(EI)_c^{(n)} = E_c^{(n)} I_c$; $(GA)_c^{(n)} = G_c^{(n)} A_c$; A_c 、 B_c 、 I_c 分别为混凝土截面

面积、静矩和惯性矩; $G_c^{(n)} = E_c^{(n)} [2(1 + \nu_c)]$ 为混凝土剪切模量; k_c^s 为混凝土梁层截面的剪切修正系数。

1.4.2 钢梁层与剪力连接件

对于钢梁层,基于线弹性本构方程可得到其内力在 t_n 时刻的表达式,有

$$\begin{cases} N_s^{(n)} = \int_{A_s} \sigma_s^{(n)} dA = (EA)_s \epsilon_s^{(n)} \\ M_s^{(n)} = \int_{A_s} z_s \sigma_s^{(n)} dA = (EI)_s \kappa_s^{(n)} \\ T_s^{(n)} = \int_{A_s} \tau_s dA = k_c^s (GA)_s \gamma_s^{(n)} \end{cases} \quad (9)$$

式中: $(EA)_s = E_s A_s$; $(EI)_s = E_s I_s$; $(GA)_s = G_s A_s$; E_s 、 A_s 、 I_s 和 G_s 分别为钢梁层的弹性模量、截面面积、惯性矩和剪切模量; k_c^s 为钢梁层截面的剪切修正系数。

对于剪力连接件,参照文献[36],假定 t_n 时刻剪力 $D_{sc}^{(n)}$ 与界面滑移 $d_{sc}^{(n)}$ 之间为线性关系,有

$$D_{sc}^{(n)} = k_{sc} d_{sc}^{(n)} \quad (10)$$

式中: k_{sc} 为连接界面的抗剪刚度。

2 组合梁控制微分方程

在以下推导中,从实际工程所采用的混凝土梁层截面形式出发,同时也为使公式表述简洁,假定混凝土梁层截面为沿中性轴上下对称的截面,即有 $B_c = 0$ 。

2.1 控制微分方程推导

对式(2)几何方程中的第 2 个方程分别基于混凝土梁层与钢梁层求二阶导,有

$$\partial_x^3 v^{(n)} = \partial_x^2 \gamma_c^{(n)} - \partial_x^2 \theta_c^{(n)} = \partial_x^2 \gamma_s^{(n)} - \partial_x^2 \theta_s^{(n)} \quad (11)$$

联立本构关系和式(11),可以得到各个力分量微分间的关系,再将式(1)中的平衡方程代入即可得到任意时刻以界面相互作用力为变量的控制微分方程

$$\begin{aligned} & \frac{(EI)^{(n)}}{k_{sc} (GA)^n} \partial_x^5 D_{sc}^{(n)} - \left[\frac{(EI)^{(n)} \beta_n^2}{(GA)^n} + \frac{1}{k_{sc}} \right] \partial_x^4 D_{sc}^{(n)} + \\ & \left[\beta_n^2 - \alpha_n^2 (EI)^{(n)} \right] \partial_x^3 D_{sc}^{(n)} = - \frac{H p_0}{(EI)_c^{(n)} + (EI)_s} + \\ & \frac{\alpha_n (EI)^{(n)}}{k_c^s (GA)_c^{(n)}} \partial_x^3 T_c - \frac{1}{(EA)_c^{(n)}} \partial_x^2 N_c + \\ & \frac{(EI)^{(n)}}{(GA)^n (EA)_c^n} \partial_x^4 N_c - \frac{H_c + \alpha_n (EI)^{(n)}}{(EI)_c^{(n)}} \partial_x^2 M_c + \\ & \frac{H_c (EI)^{(n)}}{(GA)^n (EI)_c^{(n)}} \partial_x^4 M_c \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{1}{(GA)^{(n)}} = \frac{1}{k_c^s (GA)_s} + \frac{1}{k_c^s (GA)_c^{(n)}}$$

$$\frac{1}{(EA)^{(n)}} = \frac{1}{(EA)_s} + \frac{1}{(EA)_c^{(n)}}$$

$$\alpha_n = \frac{H_s}{(EI)_s} - \frac{H_c}{(EI)_c^{(n)}}$$

$$\beta_n^2 = \frac{1}{(EA)^{(n)}} + \frac{H_s^2}{(EI)_s} + \frac{H_c^2}{(EI)_c^{(n)}}$$

2.2 控制微分方程求解

对于工程实际中的组合梁,连接界面的抗剪刚度 k_{sc} 取值一般介于 $(0, \infty)$, 本文也是基于此种取值开展研究,至于 $k_{sc} = 0$ 和 $k_{sc} = \infty$ 这 2 种特殊情况,本文暂不讨论。

显然,由于徐变遗传项 N_c 、 M_c 、 T_c 的具体表达式未知,对微分方程式(12)直接求解是很困难的。首先,在初始时刻 t_1 时,结构的收缩与徐变还未发生,故 N_c 、 M_c 、 T_c 此时均为 0,控制方程是可以求解的,并根据求解出的 $N_c^{(1)}$ 、 $M_c^{(1)}$ 、 $T_c^{(1)}$ 的具体表达式,基于数学归纳法最终得到 N_c 、 M_c 、 T_c [36]

$$\begin{cases} N_c = \sum_{k=1}^3 \mathcal{D}_k^{(n)} x^{3-k} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \eta_j^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ M_c = \sum_{k=1}^3 \mathcal{D}_{k+3}^{(n)} x^{3-k} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \eta_{j+4}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ T_c = \sum_{k=1}^3 \mathcal{D}_{k+6}^{(n)} x^{3-k} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \eta_{j+8}^{(n,i)} e_j^{(i)} \end{cases} \quad (13)$$

$$\mathcal{D}_{1,2,\dots,9}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i} \pi_{1,2,\dots,9}^{(i)}$$

$$\eta_{1,2,\dots,12}^{(n,i)} = \sum_{j=i}^{n-1} \Psi_{n,j} \zeta_{1,2,\dots,12}^{(j,i)}$$

$$e_{1,2,\dots,4}^{(j)} = e^{x \lambda_{1,2,\dots,4}^{(j)}}$$

$$\lambda_1^{(n)} = -\lambda_2^{(n)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{(EI)^{(n)} \beta_n^2 / (GA)^{(n)} + 1/k_{sc} - \sqrt{\Delta}}{2(EI)^{(n)} \sqrt{k_{sc}(GA)^{(n)}}}} & \alpha_n \neq 0 \\ \sqrt{(GA)^{(n)} / (EI)^{(n)}} & \alpha_n = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_3^{(n)} = -\lambda_4^{(n)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{(EI)^{(n)} \beta_n^2 / (GA)^{(n)} + 1/k_{sc} + \sqrt{\Delta}}{2(EI)^{(n)} \sqrt{k_{sc}(GA)^{(n)}}}} & \alpha_n \neq 0 \\ \sqrt{k_{sc} \beta_n^2} & \alpha_n = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \left[\frac{(EI)^{(n)} \beta_n^2}{(GA)^{(n)}} + \frac{1}{k_{sc}} \right]^2 - \frac{4(EI)^{(n)} \mu_n^2}{k_{sc} (GA)^{(n)}}$$

$$\mu_n = \sqrt{\beta_n^2 - \alpha_n^2 (EI)^{(n)}}$$

将式(13)代入式(12)中可得

$$\xi_1^{(n)} \partial_x^5 D_{sc}^{(n)} + \xi_2^{(n)} \partial_x^3 D_{sc}^{(n)} + \mu_n^2 \partial_x D_{sc}^{(n)} = \xi_3^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Dj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \quad (14)$$

$$\xi_1^{(n)} = \frac{(EI)^{(n)}}{k_{sc}(GA)^{(n)}} \xi_2^{(n)} = - \left[\frac{(EI)^{(n)} \beta_n^2}{(GA)^{(n)}} + \frac{1}{k_{sc}} \right]$$

$$\xi_3^{(n)} = - \frac{Hp_0}{(EI)_c^{(n)} + (EI)_s} - \frac{2\vartheta_1^{(n)}}{(EA)_c^{(n)}} - \frac{2\vartheta_4^{(n)} [H_c + \alpha_n (EI)^{(n)}]}{(EI)_c^{(n)}}$$

$$\xi_{Dj}^{(n,i)} (j=1, \dots, 4) = \left[- \frac{\eta_j^{(n,i)}}{(EA)_c^{(n)}} \frac{H_c + \alpha_n (EI)^{(n)}}{(EI)_c^{(n)}} \eta_{j+4}^{(n,i)} \right] (\lambda_j^{(i)})^2 + \left[\frac{(EI)^{(n)} \eta_j^{(n,i)}}{(GA)^{(n)} (EA)_c^{(n)}} + \frac{H_c (EI)^{(n)} \eta_{j+4}^{n,i}}{(GA)^n (EI)_c^n} \right] (\lambda_j^{(i)})^4 + \left[\frac{\alpha_n (EI)^n}{k_c^s (GA)_c^n} \eta_{j+8}^{n,i} \right] (\lambda_j^{(i)})^3$$

求解微分方程式(14),并立式(12)可得 $D_{sc}^{(n)}$ 与 $V_{sc}^{(n)}$ 的最终表达式,并可以用向量的形式表示为

$$\begin{cases} D_{sc}^{(n)} = Y_{Dsc}^{(n)} C^{(n)} + R_{Dsc}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Dscj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ V_{sc}^{(n)} = Y_{Vsc}^{(n)} C^{(n)} + R_{Vsc}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Vscj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} Y_{Dsc}^{(n)} = (\varrho e_1^{(n)}, \varrho e_2^{(n)}, e_3^{(n)}, e_4^{(n)}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ Y_{Vsc}^{(n)} = (\omega_1^{(n)} e_1^{(n)}, \omega_2^{(n)} e_2^{(n)}, \omega_3^{(n)} e_3^{(n)}, \omega_4^{(n)} e_4^{(n)}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ C^{(n)} = (C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, C_3^{(n)}, C_4^{(n)}, C_5^{(n)}, C_6^{(n)}, C_7^{(n)}, C_8^{(n)}, C_9^{(n)}, C_{10}^{(n)})^T \\ R_{Dsc}^{(n)} = \xi_4^{(n)} x \\ R_{Vsc}^{(n)} = \xi_5^{(n)} \end{cases}$$

$$\xi_4^{(n)} = \begin{cases} \xi_3^{(n)} / \mu_n^2 & \alpha_n \neq 0 \\ - \frac{H_c k_{sc} (p_0 + 2\vartheta_4^{(n)})}{(\lambda_3^{(n)})^2 (EI)_c^n} - \frac{2\vartheta_1^{(n)} k_{sc}}{(\lambda_3^{(n)})^2 (EA)_c^{(n)}} & \alpha_n = 0 \end{cases}$$

$$\xi_5^{(n)} = \begin{cases} \frac{H_c (p_0 + 2\vartheta_4^{(n)})}{(EI)_c^{(n)} \alpha_n} + \frac{2\vartheta_1^{(n)} + (EA)_c^{(n)} \beta_n^2 \xi_4^{(n)}}{(EA)_c^{(n)} \alpha_n} & \alpha_n \neq 0 \\ - \frac{(GA)^{(n)} (p_0 + 2\vartheta_4^{(n)})}{(\lambda_1^{(n)})^2 (EI)_c^{(n)}} & \alpha_n = 0 \end{cases}$$

$$\xi_{Dscj}^{(n,i)} (j=1, 2, \dots, 4) = \begin{cases} \frac{\xi_{Dj}^{(n,i)}}{\xi_1^n (\lambda_j^{(i)})^5 + \xi_2^n (\lambda_j^{(i)})^3 + \mu_n^2 \lambda_j^{(i)}} & \alpha_n \neq 0 \\ \frac{k_{sc} \lambda_j^{(i)} [(EI)_c^{(n)} \eta_j^{(n,i)} + H_c (EA)_c^{(n)} \eta_{j+4}^{(n,i)}]}{(EA)_c^{(n)} (EI)_c^{(n)} [(\lambda_j^{(i)})^2 - (\lambda_3^{(n)})^2]} & \alpha_n = 0 \end{cases}$$

$$\xi_{Vscj}^{(n,i)} (j=1, 2, \dots, 4) = \frac{\lambda_j^{(i)} [k_{sc} \beta_n^2 - (\lambda_j^{(i)})^2]}{k_{sc} \alpha_n} \xi_{Dscj}^{(n,i)} + \frac{(\lambda_j^{(i)})^2 [(EI)_c^{(n)} \eta_j^{(n,i)} + H_c (EA)_c^{(n)} \eta_{j+4}^{(n,i)}]}{(EA)_c^{(n)} (EI)_c^{(n)} \alpha_n}$$

$$\xi_{Vscj}^{(n,i)} (j=1, 2, \dots, 4) = \frac{(GA)^{(n)} (\lambda_j^{(i)})^2 [k_c^s (GA)_c^{(n)} \eta_{j+4}^{(n,i)} - \lambda_j^{(i)} (EI)_c^{(n)} \eta_{j+8}^{(n,i)}]}{k_c^s (EI)_c^{(n)} (GA)_c^{(n)} [(\lambda_j^{(i)})^2 - (\lambda_1^{(n)})^2]}$$

$$\xi_{Dj}^{(n,i)} (j=1, 2, \dots, 4) = \begin{cases} - \frac{\eta_j^{(n,i)}}{(EA)_c^{(n)}} - \frac{H_c + \alpha_n (EI)^{(n)}}{(EI)_c^{(n)}} \eta_{j+4}^{(n,i)} \right] (\lambda_j^{(i)})^2 + \left[\frac{(EI)^{(n)} \eta_j^{(n,i)}}{(GA)^{(n)} (EA)_c^{(n)}} + \frac{H_c (EI)^{(n)} \eta_{j+4}^{n,i}}{(GA)^n (EI)_c^n} \right] (\lambda_j^{(i)})^4 + \left[\frac{\alpha_n (EI)^n}{k_c^s (GA)_c^n} \eta_{j+8}^{n,i} \right] (\lambda_j^{(i)})^3 \end{cases}$$

式中: $C_1^{(n)} \sim C_{10}^{(n)}$ 均为积分常数,并在 t_n 时刻更新; ϱ 为 0-1 变量,当 $\alpha_n = 0$ 时取 0, 否则取值为 1。

将式(15)中 $D_{sc}^{(n)}$ 和 $V_{sc}^{(n)}$ 的表达式分别代入式(12)中的控制微分方程,并立式第 1.2~1.4 节中的平衡方程、几何方程和本构方程,便可得到混凝土梁层以及钢梁层的各内力分量以及位移分量的函数表达式

$$\left\{ \begin{aligned} u_c^{(n)} &= X_{uc}^{(n)} C^{(n)} + Z_{uc}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{ucj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ u_s^{(n)} &= X_{us}^{(n)} C^{(n)} + Z_{us}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{usj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ v^{(n)} &= X_v^{(n)} C^{(n)} + Z_v^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{vj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ \theta_c^{(n)} &= X_{\theta c}^{(n)} C^{(n)} + Z_{\theta c}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{\theta cj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ \theta_s^{(n)} &= X_{\theta s}^{(n)} C^{(n)} + Z_{\theta s}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{\theta sj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \end{aligned} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} N_c^{(n)} &= Y_{Nc}^{(n)} C^{(n)} + R_{Nc}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Ncj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ N_s^{(n)} &= Y_{Ns}^{(n)} C^{(n)} + R_{Ns}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Nsj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ T_c^{(n)} &= Y_{Tc}^{(n)} C^{(n)} + R_{Tc}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Tcj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ T_s^{(n)} &= Y_{Ts}^{(n)} C^{(n)} + R_{Ts}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Tsj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ M_c^{(n)} &= Y_{Mc}^{(n)} C^{(n)} + R_{Mc}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Mcj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ M_s^{(n)} &= Y_{Ms}^{(n)} C^{(n)} + R_{Ms}^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Msj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \end{aligned} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{aligned} X_{uc}^{(n)} &= \int \frac{Y_{Nc}^{(n)}}{(EA)_c^n} dx - (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ X_{us}^{(n)} &= \int \frac{Y_{Ns}^{(n)}}{(EA)_s} dx + (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ X_v^{(n)} &= \int \left[\frac{Y_{Ts}^{(n)}}{k_s^s(GA)_s} - X_{\theta s}^{(n)} \right] dx + (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\ X_{\theta c}^{(n)} &= \frac{1}{H} \left[X_{us}^{(n)} - X_{uc}^{(n)} - \frac{Y_{Dsc}^{(n)}}{k_{sc}} - \frac{H_s Y_{Ts}^{(n)}}{k_s^s(GA)_s} + \frac{H_s Y_{Tc}^{(n)}}{k_c^s(GA)_c} \right] \\ X_{\theta s}^{(n)} &= \frac{1}{H} \left[X_{us}^{(n)} - X_{uc}^{(n)} - \frac{Y_{Dsc}^{(n)}}{k_{sc}} + \frac{H_c Y_{Ts}^{(n)}}{k_s^s(GA)_s} - \frac{H_c Y_{Tc}^{(n)}}{k_c^s(GA)_c} \right] \\ Z_{uc}^{(n)} &= \xi_{11}^{(n)} x^3 + \xi_{12}^{(n)} x^2 + \xi_{13}^{(n)} x \\ Z_{us}^{(n)} &= \xi_{10}^{(n)} x^3 \\ Z_v^{(n)} &= \int \left[\frac{R_{Ts}^{(n)}}{k_s^s(GA)_s} - Z_{\theta s}^{(n)} \right] dx \\ Z_{\theta c}^{(n)} &= \frac{1}{H} \left\{ Z_{us}^{(n)} - Z_{uc}^{(n)} - \frac{1}{k_{sc}} R_{Dsc}^{(n)} - \frac{H_s R_{Ts}^{(n)}}{k_s^s(GA)_s} + \right. \\ &\quad \left. \frac{H_s [R_{Tc}^{(n)} - \vartheta_7^{(n)} x^2 - \vartheta_8^{(n)} x - \vartheta_9^{(n)}]}{k_c^s(GA)_c} + H_s \gamma_{sh}^{(n)} \right\} \\ Z_{\theta s}^{(n)} &= \frac{1}{H} \left\{ Z_{us}^{(n)} - Z_{uc}^{(n)} - \frac{1}{k_{sc}} R_{Dsc}^{(n)} + \frac{H_c}{k_s^s(GA)_s} R_{Ts}^{(n)} - \right. \\ &\quad \left. \frac{H_c}{k_c^s(GA)_c} [R_{Tc}^{(n)} - \vartheta_7^{(n)} x^2 - \vartheta_8^{(n)} x - \vartheta_9^{(n)}] - H_c \gamma_{sh}^{(n)} \right\} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} Y_{Nc}^{(n)} &= -\int Y_{Dsc}^{(n)} dx - (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ Y_{Ns}^{(n)} &= \int Y_{Dsc}^{(n)} dx - (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ Y_{Tc}^{(n)} &= (\zeta_{c1}^{(n)} e_1^{(n)}, \zeta_{c2}^{(n)} e_2^{(n)}, \zeta_{c3}^{(n)} e_3^{(n)}, \zeta_{c4}^{(n)} e_4^{(n)}, \zeta_{c5}^{(n)}, 0, 0, 0, 0) \\ Y_{Ts}^{(n)} &= (\zeta_{s1}^{(n)} e_1^{(n)}, \zeta_{s2}^{(n)} e_2^{(n)}, \zeta_{s3}^{(n)} e_3^{(n)}, \zeta_{s4}^{(n)} e_4^{(n)}, \zeta_{s5}^{(n)}, 0, 0, 0, 0) \\ Y_{Mc}^{(n)} &= (EI)_c^{(n)} \partial_x X_{\theta c}^{(n)} \\ Y_{Ms}^{(n)} &= (EI)_s^{(n)} \partial_x X_{\theta s}^{(n)} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} R_{Nc}^{(n)} &= -\int R_{Dsc}^{(n)} dx \\ R_{Ns}^{(n)} &= \int R_{Dsc}^{(n)} dx \\ R_{Tc}^{(n)} &= \xi_6^{(n)} x + \xi_7^{(n)} \\ R_{Ts}^{(n)} &= \xi_8^{(n)} x + \xi_9^{(n)} \\ R_{Mc}^{(n)} &= (EI)_c^{(n)} \partial_x Z_{\theta c}^{(n)} + \vartheta_4^{(n)} x^2 + \vartheta_5^{(n)} x + \vartheta_6^{(n)} \\ R_{Ms}^{(n)} &= (EI)_s^{(n)} \partial_x Z_{\theta s}^{(n)} \end{aligned} \right.$$

并且有

$$\xi_{Tcj}^{(n,i)} (j=1, \dots, 4) = \left[\zeta_{c5}^{(n)} - \frac{(\lambda_j^{(i)})^2 (EI)_c^{(n)}}{Hk_{sc}} \right] \xi_{Dscj}^{(n,i)} - \frac{\lambda_j^{(i)} H_s (EI)_c^{(n)}}{H(GA)^{(n)}} \xi_{Vscj}^{(n,i)} + \frac{\lambda_j^{(i)} \eta_j^{(n,i)} (EI)_c^{(n)}}{H(EA)_c^{(n)}} - \frac{(\lambda_j^{(i)})^2 \eta_{j+8}^{(n,i)} H_s (EI)_c^{(n)}}{k_c^s H(GA)_c^{(n)}} + \lambda_j^i \eta_{j+4}^{(n,i)}$$

$$\xi_{Tsj}^{(n,i)} (j=1, \dots, 4) = \left[\zeta_{s5}^{(n)} - \frac{(\lambda_j^{(i)})^2 (EI)_s^{(n)}}{Hk_{sc}} \right] \xi_{Dscj}^{(n,i)} + \frac{\lambda_j^{(i)} H_c (EI)_s^{(n)}}{H(GA)^{(n)}} \xi_{Vscj}^{(n,i)} + \frac{\lambda_j^{(i)} \eta_j^{(n,i)} (EI)_s^{(n)}}{H(EA)_c^{(n)}} + \frac{(\lambda_j^{(i)})^2 \eta_{j+8}^{(n,i)} H_c (EI)_s^{(n)}}{k_c^s H(GA)_c^{(n)}}$$

$$\zeta_{cj}^{(n)} (j=1, 2) = \zeta_{c5}^{(n)} \varrho - \frac{(EI)_c^{(n)}}{Hk_{sc}} \varrho (\lambda_j^{(n)})^2 - \frac{H_s (EI)_c^{(n)}}{H(GA)^{(n)}} \omega_j^{(n)} \lambda_j^{(n)}$$

$$\zeta_{c5}^{(n)} = \frac{(EI)_c^{(n)}}{H(EA)^{(n)}} + H_c$$

$$\zeta_{cj}^{(n)} (j=3, 4) = \zeta_{c5}^{(n)} - \frac{(EI)_c^{(n)}}{Hk_{sc}} (\lambda_j^{(n)})^2 - \frac{H_s (EI)_c^{(n)}}{H(GA)^{(n)}} \omega_j^{(n)} \lambda_j^{(n)}$$

$$\xi_6^{(n)} = \left[\frac{(EI)_c^{(n)}}{H(EA)^{(n)}} + H_c \right] \xi_4^{(n)} + 2\vartheta_4^{(n)} + \frac{2\vartheta_1^{(n)} (EI)_c^{(n)}}{H(EA)_c^{(n)}}$$

$$\xi_7^{(n)} = \frac{\vartheta_2^{(n)} (EI)_c^{(n)}}{H(EA)_c^{(n)}} - \frac{2\vartheta_7^{(n)} H_s (EI)_c^{(n)}}{k_c^s H(GA)_c^{(n)}} + \vartheta_5^{(n)}$$

$$\begin{aligned} \xi_8^{(n)} &= \left[\frac{(EI)_s}{H(EA)^{(n)}_c} + H_s \right] \xi_4^{(n)} + \frac{2\vartheta_1^{(n)}(EI)_s}{H(EA)^{(n)}_c} \\ \xi_9^{(n)} &= \frac{\vartheta_2^{(n)}(EI)_s}{H(EA)^{(n)}_c} + \frac{2\vartheta_7^{(n)}H_c(EI)_s}{k_c^s H(GA)^{(n)}_c} \\ \xi_{10}^{(n)} &= \frac{\xi_4^{(n)} x^3}{6(EA)_s} \\ \xi_{11}^{(n)} &= \frac{-[\xi_4^{(n)} + 2\vartheta_1^{(n)}]}{6(EA)^{(n)}_c} \\ \xi_{12}^{(n)} &= \frac{-\vartheta_2^{(n)}}{2(EA)^{(n)}_c} \\ \xi_{13}^{(n)} &= \frac{-\vartheta_3^{(n)}}{(EA)^{(n)}_c} + \epsilon_{sh}^{(n)} \\ \xi_{Nsj}^{(n,i)} (j=1, \dots, 4) &= -\xi_{Dscj}^{(n,i)} = \xi_{Dscj}^{(n,i)} / \lambda_j^{(i)} \\ \xi_{ucj}^{(n,i)} (j=1, \dots, 4) &= \frac{\xi_{Ncj}^{(n,i)} - \eta_j^{(n,i)}}{\lambda_j^{(i)}(EA)_c^{(n)}} \\ \xi_{usj}^{(n,i)} (j=1, \dots, 4) &= \xi_{Nsj}^{(n,i)} / [\lambda_j^{(i)}(EA)_s] \\ \xi_{\theta cj}^{(n,i)} (j=1, \dots, 4) &= \frac{1}{H} \left\{ \xi_{usj}^{(n,i)} - \xi_{ucj}^{(n,i)} - \frac{1}{k_{sc}} \xi_{Dscj}^{(n,i)} - \right. \\ &\quad \left. \frac{H_c}{k_c^s(GA)_s} \xi_{Tsj}^{(n,i)} + \frac{H_c}{k_c^s(GA)_c^{(n)}} [\xi_{Tcj}^{(n,i)} - \eta_{j+8}^{(n,i)}] \right\} \\ \xi_{\theta sj}^{(n,i)} (j=1, \dots, 4) &= \frac{1}{H} \left\{ \xi_{usj}^{(n,i)} - \xi_{ucj}^{(n,i)} - \frac{1}{k_{sc}} \xi_{Dscj}^{(n,i)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{H_s}{k_c^s(GA)_s} \xi_{Tsj}^{(n,i)} - \frac{H_s}{k_c^s(GA)_c^{(n)}} [\xi_{Tcj}^{(n,i)} - \eta_{j+8}^{(n,i)}] \right\} \\ \xi_{Msj}^{(n,i)} (j=1, \dots, 4) &= (EI)_s \lambda_j^{(i)} \xi_{\theta sj}^{(n,i)} \\ \xi_{Mcj}^{(n,i)} (j=1, \dots, 4) &= (EI)_c^{(n)} \lambda_j^{(i)} \xi_{\theta cj}^{(n,i)} + \eta_{j+4}^{(n,i)} \\ \xi_{vj}^{(n,i)} (j=1, \dots, 4) &= \frac{\xi_{Tsj}^{(n,i)}}{\lambda_j^{(i)} k_c^s(GA)_s} - \frac{\xi_{\theta sj}^{(n,i)}}{\lambda_j^{(i)}} \end{aligned}$$

至此,将式(17)中的 $N_c^{(n)}$ 、 $M_c^{(n)}$ 以及 $T_c^{(n)}$ 分别与式(13)中的 $N_c^{(i)}$ 、 $M_c^{(i)}$ 与 $T_c^{(i)}$ 在 i 取值为 n 时作比较,可知两者具有相同的表达形式,由此能证明本文假设的函数式是正确的,同时能利用这种关系将式中的系数 $\pi_{1, \dots, 9}^{(n)}$ 、 $\xi_{1, \dots, 12}^{(n,i)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 全部求出。

3 组合梁单元精确有限元列式

在得到的组合梁位移场与内力场的解析表达式基础上,采用直接刚度法^[12]推导部分作用两层 Timoshenko 组合梁时变有限元列式。如图 3 所示,长度为 L 的双层组合梁单元,每个单元有 10 个自由度,也正对应前面出现的 10 个积分常数,通过利用 $x=0$ 和 $x=L$ 这 2 个边界条件,便可以建立起积分

常数向量 $C^{(n)}$ 与单元节点位移向量 $q^{(n)}$ 之间的关系,有

$$q^{(n)} = X^{(n)} C^{(n)} + Z^{(n)} + \xi_q^{(n)} \quad (18)$$

$$\begin{cases} q^{(n)} = (u_{c0}^{(n)}, u_{s0}^{(n)}, v_0^{(n)}, \theta_{c0}^{(n)}, \theta_{s0}^{(n)}, u_{cL}^{(n)}, u_{sL}^{(n)}, v_L^{(n)}, \theta_{cL}^{(n)}, \theta_{sL}^{(n)})^T \\ X^{(n)} = \left((X_{uc}^{(n)}(x=0))^T, (X_{us}^{(n)}(x=0))^T, \dots, (X_{\theta s}^{(n)}(x=L))^T \right)^T \\ Z^{(n)} = \left((Z_{uc}^{(n)}(x=0))^T, (Z_{us}^{(n)}(x=0))^T, \dots, (Z_{\theta s}^{(n)}(x=L))^T \right)^T \\ \xi_q^{(n)} = \left((\xi_{uc}^{(n)}(x=0))^T, (\xi_{us}^{(n)}(x=0))^T, \dots, (\xi_{\theta s}^{(n)}(x=L))^T \right)^T \\ \xi_{uc}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{ucj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ \xi_{us}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{usj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ \xi_v^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{vj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ \xi_{\theta c}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{\theta cj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ \xi_{\theta s}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{\theta sj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \end{cases}$$

同理可以得到单元节点力向量 $Q^{(n)}$ 与积分常数向量 $C^{(n)}$ 之间的关系,有

$$Q^{(n)} = Y^{(n)} C^{(n)} + R^{(n)} + \xi_Q^{(n)} \quad (19)$$

$$\begin{cases} Q^{(n)} = (N_{c0}^{(n)}, N_{s0}^{(n)}, T_0^{(n)}, M_{c0}^{(n)}, M_{s0}^{(n)}, \dots, M_{sL}^{(n)})^T \\ Y^{(n)} = \left((-Y_{Nc}^{(n)}(x=0))^T, (-Y_{Ns}^{(n)}(x=0))^T, \dots, (Y_{Ms}^{(n)}(x=0))^T \right)^T \\ R^{(n)} = (-R_{Nc}^{(n)}(x=0), -R_{Ns}^{(n)}(x=0), \dots, R_{Ms}^{(n)}(x=L))^T \\ \xi_Q^{(n)} = (-\xi_{Nc}^{(n)}(x=0), -\xi_{Ns}^{(n)}(x=0), \dots, \xi_{Ms}^{(n)}(x=L))^T \\ Y_T^{(n)} = Y_{Tc}^{(n)} + Y_{Ts}^{(n)} \\ R_T^{(n)} = R_{Tc}^{(n)} + R_{Ts}^{(n)} \\ \xi_{Nc}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Ncj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ \xi_{Ns}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Nsj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ \xi_T^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Tcj}^{(n,i)} e_j^{(i)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Tsj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ \xi_{Mc}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Mcj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \\ \xi_{Ms}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 \xi_{Msj}^{(n,i)} e_j^{(i)} \end{cases}$$

因为式(18)中单元节点位移向量可以是任意的,所以 $X^{(n)}$ 一定是一个非奇异矩阵,因此可以通过

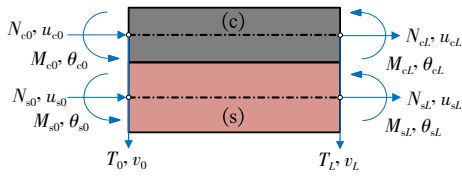


图3 组合梁单元节点力与节点位移

Fig. 3 Nodal forces and nodal displacements of composite beam element

式(18)得到积分常数向量 $C^{(n)}$ 的表达式

$$C^{(n)} = (X^{(n)})^{-1} (q^{(n)} - Z^{(n)} - \xi_q^{(n)}) \quad (20)$$

将式(20)代入式(19),并写成常见的有限元平衡列式

$$K^{(n)} q^{(n)} = Q^{(n)} + Q_0^{(n)} \quad (21)$$

且有

$$\begin{cases} K^{(n)} = Y^{(n)} (X^{(n)})^{-1} \\ Q_0^{(n)} = K^{(n)} (Z^{(n)} + \xi_q^{(n)}) - (R^{(n)} + \xi_Q^{(n)}) \end{cases}$$

式中: $K^{(n)}$ 、 $Q_0^{(n)}$ 、 $Q^{(n)}$ 分别为 t_n 时刻组合梁单元的“精确”刚度矩阵、在均布荷载以及混凝土收缩与徐变作用下的等效节点力向量以及外荷载集中力向量。

上述“精确”是指该刚度矩阵是完全基于弹性力学微分控制方程的解析解推导求出,未对单元力场和位移场作任何假设近似,因此为保证计算结果精度所需划分的最小单元数仅取决于边界与荷载情况^[17,36]。

4 算例验证与分析

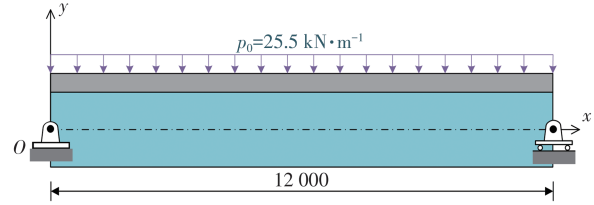
本节共 3 个算例,用于验证本文提出的算法及研制的程序,在此基础上分析梁层剪切效应对钢-混组合梁长期性能的影响并开展部分参数分析,收缩与徐变效应分析采用欧洲设计规范 CEB-MC90 中的收缩与徐变模型。

应补充说明的是,本文计算方法与已有未考虑剪切效应的计算方法相比,区别主要在于位移协调方程中,本文在描述结构竖向挠度同截面转角的协调关系时需引入截面的剪切应变;同时,在组合梁各层的本构关系中,本文也需因考虑剪切应变而增加对应的本构方程。在有限元模型中,剪切效应会导致组合梁上下梁层转角不一定相同,故描述单元节点转角的自由度会由 1 个增加为 2 个。上述改变也使得本文针对钢-混组合梁时变分析建立的有限元方法变的更加复杂。

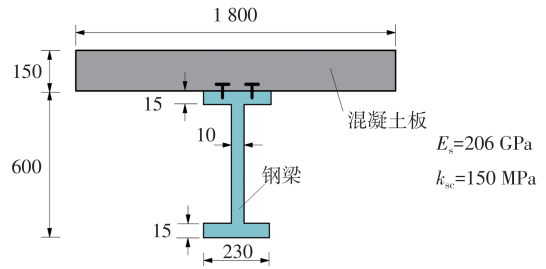
4.1 算例 1

图 4 为简支钢-混组合梁。梁跨度为 12 m,均布荷载 $p_0 = 25.5 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-1}$,混凝土以及钢梁的泊松比

均取 0.2,其余参数详见图 4,图 5 和表 1 为本文计算的部分时刻组合梁挠度及文献[37]对应值,本算例采用 2 个单元进行计算。



(a) 整体结构受力情况



(b) 截面尺寸

图 4 均布荷载作用下的组合梁(单位:mm)

Fig. 4 Composite beam subjected to uniform load (unit: mm)

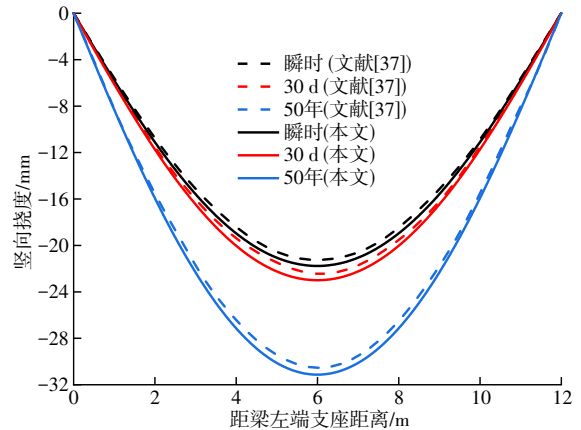


图 5 不同时期的挠度对比

Fig. 5 Comparison of deflections at different time periods

表 1 不同时期梁跨中挠度

Table 1 Mid-span deflection at different time stages mm

来源	瞬时	30 d	50年
本文	-21.86	-23.09	-31.26
文献[37]	-21.33	-22.62	-30.80

为探讨本文分析方法的特点,表 2、3 分别给出组合梁划分成不同数量单元(时步数均为 5)以及求解时间域 50 年划分成不同时步数(单元数均为 2)下的梁跨中竖向挠度计算结果的对比。

图 5 中虚线部分为文献[37]通过利用状态空间法(解析法)结合初应变法得到的预测结果且未考虑剪切效应。由图 5 和表 1 可知,由于该组合梁高

表2 不同单元数划分下计算结果对比

mesh divisions			
单元数	瞬时	30 d	50年
2	-21.859 333 3	-23.087 610 7	-31.264 224 4
4	-21.859 333 3	-23.087 610 7	-31.264 224 4
6	-21.859 333 3	-23.087 610 7	-31.264 224 4
10	-21.859 333 3	-23.087 610 7	-31.264 224 4
20	-21.859 333 3	-23.087 610 7	-31.264 224 4

表3 不同时期计算结果对比

mm				
步数	30 d	2年	10年	50年
5	-23.087 61	-29.024 99	-30.730 55	-31.264 22
7	-23.087 61	-29.009 82	-30.724 32	-31.261 96
9	-23.087 61	-28.999 37	-30.712 22	-31.261 35
11	-23.087 61	-28.997 30	-30.652 70	-31.235 32

跨比较小,梁层剪切效应不明显,故考虑梁层剪切效应的本文计算值与不考虑该效应的文献[37]计算值差别很小,但也能看出本文瞬时位移计算结果(-21.86 mm)略大于文献[37](-21.33 mm)(这与文献[6]的“考虑剪切效应得到的位移比不考虑要大”结论一致),由此导致后续发生收缩与徐变后本文计算结果始终略大于文献[37]。

由表2可知,在仅划分2单元数的情况下,所计算出的结果与划分20单元数的计算结果完全一致,这正符合前文所描述的“精确”特性,即无需通过加密单元网格划分就能得到很精确的计算结果。

由表3可知,由于对时间上连续积分的Volterra积分方程采取了梯形积分求解,即使采用不同时步数,所得到的计算结果差别也很小,因此可以根据实际需求来进行时步划分。

4.2 算例2

如图6所示两跨连续组合梁,其余几何与材料参数详见图6所示或文献[36],算例分析中研究了2片承受不同均布荷载的梁,其中1号梁只受自重荷载 $p_0 = 1.92 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$,2号梁还受到额外的持续均布荷载 $4.75 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$ 的作用,即 $p_0 = 6.67 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$,本算例采用4个单元进行计算。

图7、8分别给出了本文计算值与文献[38]实测值以及文献[36]计算值的对比,图9则给出了以实测值为标准,考虑梁层剪切效应的本文计算值与不考虑该效应的文献[36]计算值(未考虑开裂的情况下)精度的对比。有2点需说明:一是为与文献[38]

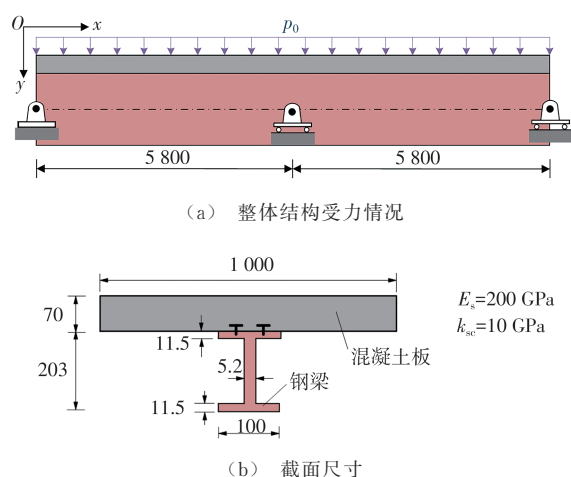


图6 两跨连续组合梁(单位:mm)

Fig. 6 Two-span continuous composite beam (unit: mm)

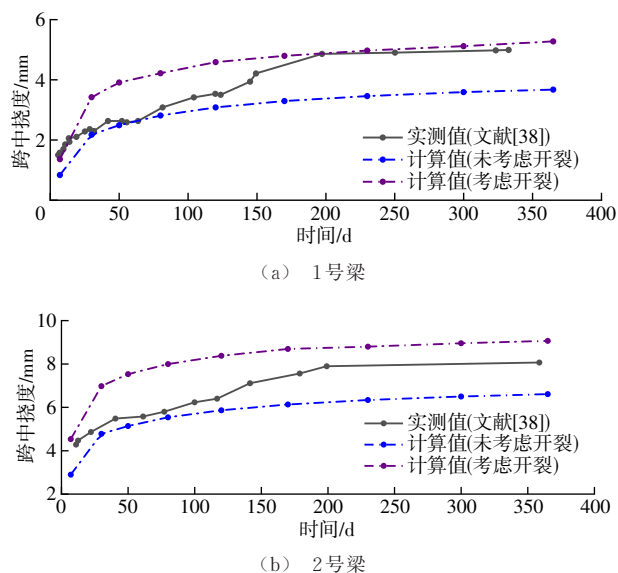


图7 跨中挠度计算值和文献[38]实测值对比

Fig. 7 Comparison of calculated mid-span deflection values and measured values of ref. [38]

提供的收缩与徐变相关参数实测值一致,本文和参考文献[36]也对这些参数作出了同样的调整;二是由于试验梁中部支座处负弯矩区混凝土在测试荷载作用下已出现开裂现象,与文献[36]一样本文分析增加了一个模拟梁开裂的计算工况,即按照CEB-MC90规范中所给的建议:在中部支座处两侧15%跨长范围内忽略混凝土部分对截面刚度的贡献。

由图7可看出,在不考虑梁支座处开裂时,与文献[36]一样,数值计算结果与实测结果差别较大,但在考虑开裂后,吻合情况逐渐改善,计算值与实测值吻合较好,特别是1号梁到了200 d以后。但是2号梁模拟的效果并不理想,这是由于本开裂工况

仅是按照欧洲规范中建议进行的初步分析,通过图 8 可以看到本文模型与文献[36]中给出的预测值吻合良好,并非模型本身对此组合梁不适用。考虑到混凝土开裂效应并非本文的研究重点,故未进一步深化分析方法来提高同此算例中试验值的模拟精度。

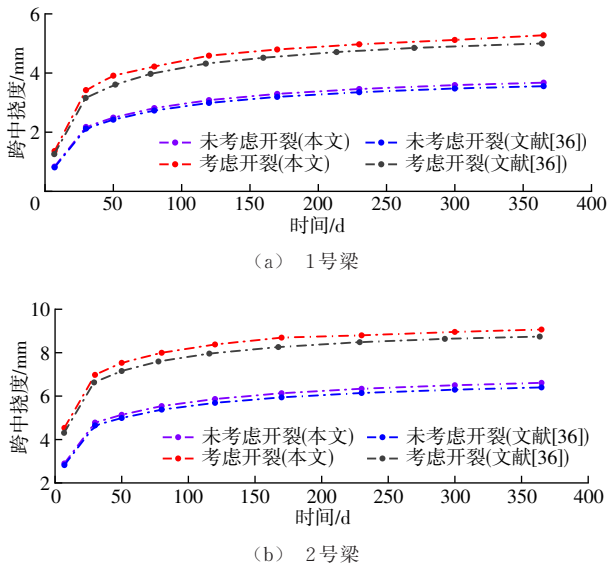


图 8 跨中挠度计算值和文献[36]值对比

Fig. 8 Comparison of calculated mid-span deflection values and ref. [36] values

由图 8 和表 4 可看出,本文计算值与文献[36]计算值略有差异,但总体趋势是完全一致的,本文计算值略大于文献[36],并且在考虑开裂后剪切效应表现的更加明显,即图 8 中考虑开裂的线条较未考虑开裂的线条间隔更大,这正是由于模拟开裂时会减少单元有效长度,导致结构的跨高比进一步增加。由图 9 可看出,无论是 1 号梁还是 2 号梁,在考虑梁层剪切效应影响后,数值计算结果同实测值之间的误差明显减小,在整个分析时间段内,考虑梁层剪切效应的本文计算值比不考虑该效应的文献[36]计算值误差普遍减小 10% 左右。可见在长期效应分析中,剪切效应对结构行为的影响仍然是不可忽略的。

表 4 跨中挠度计算结果对比

Table 4 Comparison of mid-span deflections		mm	
来源	瞬时	30 d	365 d
本文(1号梁)	0.833 64	2.177 39	3.674 53
文献[38](1号梁)	0.811 45	2.121 35	3.557 26
本文(2号梁)	2.896 03	4.777 83	6.606 56
文献[38](2号梁)	2.818 93	4.647 05	6.394 78

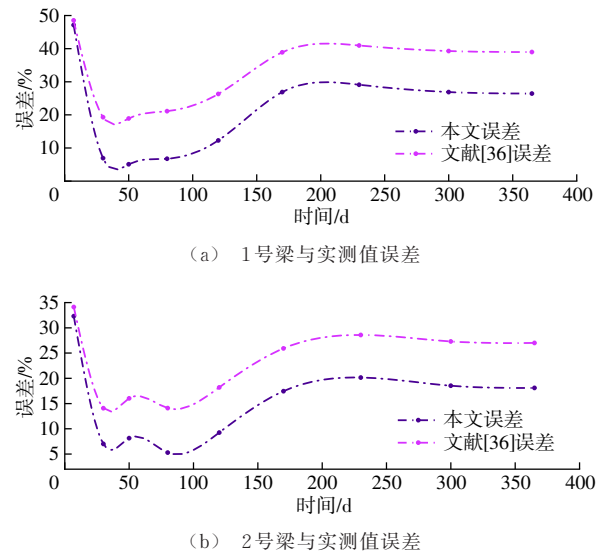


图 9 跨中挠度计算误差对比

Fig. 9 Comparison of calculation errors of mid-span deflection

4.3 算例 3

图 10 为 1 片受均布荷载与跨中集中荷载的简支梁,环境湿度取 40%, $f_{ck} = 60 \text{ MPa}$,混凝土以及钢梁的泊松比 ν_c, ν_s 均取 0.2,受到的均布荷载 $p_0 = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$,跨中集中荷载 $p = 160 \text{ kN}$,剪切修正系数均取 1,本算例采用 2 个单元进行计算。

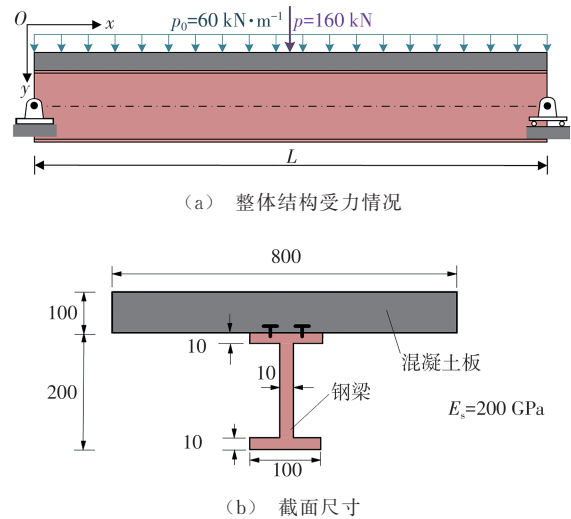


图 10 承受均布荷载与集中荷载的组合梁(单位:mm)

Fig. 10 Composite beam subjected to uniformly distributed and concentrated loads (unit: mm)

图 11、12 给出了考虑收缩与徐变的跨中挠度、端部滑移与跨高比的变化曲线,此时剪力连接件刚度 $k_{sc} = 10\ 000 \text{ MPa}$,同时表 5、6 给出了相同条件下跨高比分别为 12 和 5 时不同时期跨中挠度以及端部滑移具体值的对比;表 7 则是给出了在不同时期下,跨高比较小时计算值与参考值的差距。

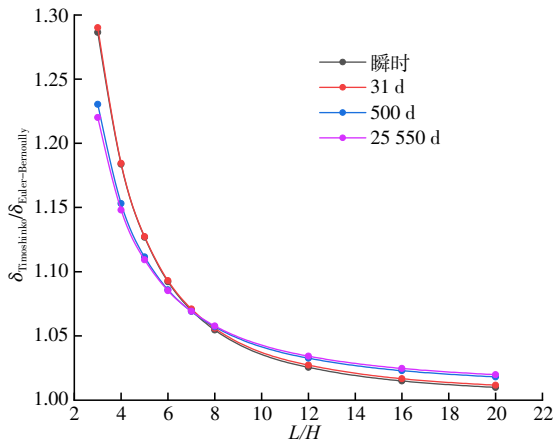


图 11 时变影响下跨中挠度与跨高比关系

Fig. 11 Relationship between mid-span deflection and L/H under time-dependent effects

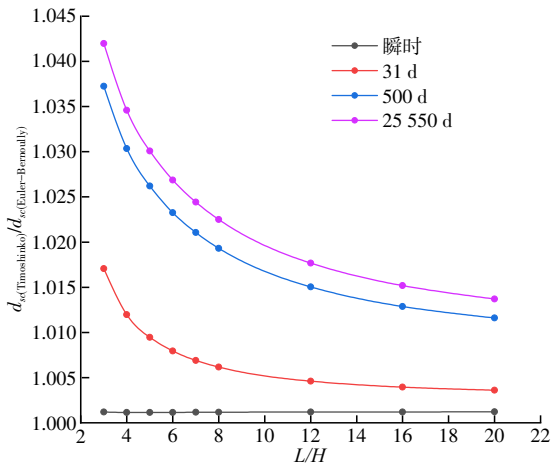


图 12 时变影响下界面端部滑移与跨高比关系

Fig. 12 Relationship between interface end slip and L/H under time-dependent effects

表 5 $L/H=3$ 时跨中挠度以及端部滑移值

Table 5 Mid-span deflections and end slips at $L/H = 3$ mm

时期	跨中挠度		端部滑移	
	计算值	参考值	计算值	参考值
瞬时	0.261 88	0.203 55	0.100 68	0.100 56
31 d	0.323 02	0.250 35	0.127 01	0.124 88
500 d	0.515 93	0.419 26	0.226 21	0.218 09
25 550 d	0.570 57	0.467 58	0.255 29	0.245 01

表 6 $L/H=12$ 时跨中挠度以及端部滑移值

Table 6 Mid-span deflections and end slips at $L/H = 12$ mm

时期	跨中挠度		端部滑移	
	计算值	参考值	计算值	参考值
瞬时	15.027 6	14.652 2	1.884 73	1.882 48
31 d	17.856 7	17.381 7	2.254 20	2.243 84
500 d	24.730 1	23.945 3	3.205 25	3.157 74
25 550 d	26.532 3	25.651 0	3.458 21	3.398 17

图 13 给出了考虑收缩与徐变的跨中挠度与剪力连接件刚度 k_{sc} 的变化曲线,此时跨高比 $L/H=5$ 。有 2 点补充说明:计算中梁高 H 始终不变,变化的是

表 7 不同时期及跨高比下跨中挠度计算值与参考值之比

Table 7 Ratios of calculated value to reference value of mid-span deflection under different time periods and span-to-depth ratios

时期	不同跨高比(L/H)时的计算值与参考值之比/%					
	10	7	6	5	4	3
瞬时	3.3	7.0	9.2	12.7	18.4	28.6
500 d	2.6	6.9	8.6	11.2	15.3	23.1
25 550 d	2.5	6.8	8.5	10.9	14.8	22.0

梁长 L ; 图 11~13 中纵坐标变量下标 Timoshenko 表示本文计算结果(后续分析中简称为计算值),下标 Euler-Bernoulli 表示采用文献[36]方法计算的结果(简称为参考值)。

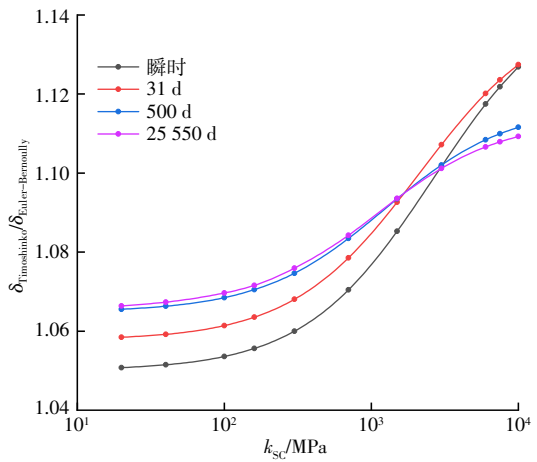


图 13 时变影响下跨中挠度与剪力连接刚度关系

Fig. 13 Relationship between mid-span deflection and shear connection stiffness under time-dependent effects

根据表 5~7 中数据可以得到,在跨高比为 12 时,不论是梁跨中挠度值还是端部滑移值,计算值与参考值在各时期都十分相近,相差在 5% 以内;而当跨高比为 3 时,梁跨中挠度的计算值与参考值的差距从瞬时的 28.6% 下降到 25 550 d 的 22.0%,但是对于端部滑移值,仍未出现明显的差距,相差仍在 5% 以内;结合图 11 线条变化规律可以发现,在跨高比小于 8 时由于剪切效应的影响,计算值开始显著大于参考值,但是结构的收缩与徐变会让这种情况有所缓和,即随着时间的发展,剪切效应对跨中挠度的影响呈下降趋势,随着跨高比从 8 开始逐渐减小,混凝土的收缩与徐变效应使得剪切效应对跨中挠度影响下降的幅度从 0.31% 提高到了 6.63%,随着跨高比的增大,剪切效应的影响越来越小,导致计算值与参考值之比几乎为 1,显然这是符合预期的。根据表 5、6 的端部滑移计算值与参考值对比并结合图 12 可知,不考虑收缩与徐变影响时,界面端部滑移的计算值与参考值之比基本不变,这主要是因为滑移值主要还是受剪力连接件刚

度的影响;考虑收缩与徐变后,计算值与参考值之比有一个从大变小的过程,且在小跨高比时下降的快,大跨高比时下降较慢,这显然与跨高比增大时剪切效应减弱是一致的。

从图13可看出,对于小跨高比组合梁(跨高比 $L/H=5$),在混凝土时变效应的作用下,剪切效应的影响会有所缓和,这与图11的预测结果是一致的。同时整体上看到随着剪力连接件刚度的增加,计算值与参考值之比也越来越大,这一点可以理解为随着剪力连接件刚度的增大,2个梁层越来越倾向于一个整体,使得原本上下2个梁层的截面等价于更高的一个梁层截面高度,跨高比随之减小,剪切效应的作用便随之增大。整体而言,收缩与徐变使得跨中挠度的计算值与参考值之比随剪力连接件刚度变化而改变的幅度减小。

5 结 语

(1)建立了考虑界面滑移与梁层剪切变形的有限元方法,算例分析表明其能有效预测钢-混组合梁考虑梁层剪切变形与界面滑移后的时变行为。与以往未考虑剪切效应的研究相比,该方法在几何、本构方程及节点自由度方面均进行了相应的增改。

(2)采用基于解析解的直接刚度法求得钢-混组合梁单元刚度矩阵,以及采用梯形积分法求解混凝土徐变的Volterra积分方程,算例结果表明,本文方法能在单元划分数量和收缩与徐变分析时步数都比较小的情况下求得具有很高计算精度的结果,由此说明本文方法具有良好的计算精度与计算效率。

(3)随着混凝土计算龄期的增加,收缩与徐变效应使得剪切效应对跨中挠度的影响幅度有所下降,并且随着跨高比的进一步减小,下降幅度会更加明显,如本文算例3中跨高比从8逐渐减小时,混凝土的收缩与徐变效应使得剪切效应对跨中挠度影响下降的幅度从0.31%提高到了6.63%;在跨高比为6时,随着收缩与徐变效应的发生,剪切效应对跨中挠度的影响从9.2%下降到8.5%,而在跨高比为3时,其影响从28.6%下降到22.0%,可看出剪切效应越明显,收缩与徐变效应对其影响也越大。对于跨高比小于8的组合梁,在时变效应分析中应考虑剪切效应的影响。

(4)本文方法目前只适用于二维的钢-混组合梁结构,对于一些具有“翘曲”变形特征的三维组合梁结构的时变性能仍有待后续进一步研究。

参考文献:

Reference:

- [1] 李 聪,聂建国,周心怡,等. 钢-混凝土连续组合梁桥负弯矩区抗裂设计[J]. 建筑结构学报,2022,43(3):172-178.
LI Cong, NIE Jian-guo, ZHOU Xin-yi, et al. Anti-cracking design for hogging moment regions of steel-concrete continuous composite beam bridges [J]. Journal of Building Structures, 2022, 43(3): 172-178.
- [2] 贺绍华,杨 刚,房腾鹏,等. 带开孔板连接件的HSS-UHPC组合梁抗弯性能[J]. 交通运输工程学报,2022,22(6):143-157.
HE Shao-hua, YANG Gang, FANG Teng-peng, et al. Flexural performance of HSS-UHPC composite beams with perfobond strip connectors [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2022, 22(6): 143-157.
- [3] 黄育凡,方远威,吴庆雄,等. 工字组合梁整体式桥台节点受力性能与刚度计算[J]. 交通运输工程学报,2025,25(2):329-341.
HUANG Yu-fan, FANG Yuan-wei, WU Qing-xiong, et al. Mechanical performance and stiffness calculation of integral abutment joints in I-shaped composite girders [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2025, 25(2): 329-341.
- [4] RANZI G. Locking problems in the partial interaction analysis of multi-layered composite beams[J]. Engineering Structures, 2008, 30(10): 2900-2911.
- [5] LEPOURRY-NICOLLET C, HENG P, SOMJA H, et al. Influence of partial shear connection on the behaviour of U-shaped steel-concrete beams with L-shaped shear connectors [J]. Engineering Structures, 2023, 278: 115360.
- [6] NGUYEN Q H, MARTINELLI E, HJIAJ M. Derivation of the exact stiffness matrix for a two-layer Timoshenko beam element with partial interaction [J]. Engineering Structures, 2011, 33(2): 298-307.
- [7] SCHNABL S, SAJE M, TURK G, et al. Locking-free two-layer Timoshenko beam element with interlayer slip [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2007, 43(9): 705-714.
- [8] AYOUB A A. A force-based model for composite steel-concrete beams with partial interaction [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2005, 61(3): 387-414.
- [9] AYOUB A A, FILIPPOU F C. Mixed formulation of nonlinear steel-concrete composite beam element [J]. Journal of Structural Engineering (ASCE), 2000, 126(3): 371-381.
- [10] REDDY J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51(4): 745-752.
- [11] CHAKRABARTI A, SHEIKH A H, GRIFFITH M, et al. Analysis of composite beams with partial shear interactions using a higher-order beam theory [J]. Engineering Structures, 2012, 36: 283-291.
- [12] RANZI G, BRADFORD M A, UY B. A direct stiffness analysis of a composite beam with partial interaction [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61(5): 657-672.

- [13] FAELLA C, MARTINELLI E, NIGRO E. Steel-concrete composite beams in partial interaction: Closed-form “exact” expression of the stiffness matrix and the vector of equivalent nodal forces[J]. *Engineering Structures*, 2010, 32(9): 2744-2754.
- [14] MARTINELLI E, FAELLA C, DI PALMA G. Shear-flexible steel-concrete composite beams in partial interaction: Closed-form “exact” expression of the stiffness matrix [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2012, 138(2): 151-163.
- [15] SOUSA J B M. Exact finite elements for multilayered composite beam-columns with partial interaction [J]. *Computers & Structures*, 2013, 123: 48-57.
- [16] KEO P, NGUYEN Q H, SOMJA H, et al. Derivation of the exact stiffness matrix of shear-deformable multi-layered beam element in partial interaction[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2016, 112: 40-49.
- [17] SUN Q K, ZHANG N, LIU X. A numerically stable exact method for analysis of partial-interaction composite beams based on Timoshenko beam theory [J]. *Engineering Structures*, 2022, 273: 115049.
- [18] BATTINI J M, NGUYEN Q H, HJIAJ M. Non-linear finite element analysis of composite beams with interlayer slips[J]. *Computers & Structures*, 2009, 87(13/14): 904-912.
- [19] LE GROGNEC P L, NGUYEN Q H, HJIAJ M. Plastic bifurcation analysis of a two-layer shear-deformable beam-column with partial interaction [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, 67: 85-94.
- [20] OENG T, KEO P, GUEZOULI S, et al. Large displacement analysis of two-layer beam-columns taking into account slip and uplift[J]. *Engineering Computations*, 2023, 40(1): 265-295.
- [21] 樊健生, 聂建国, 王浩. 考虑收缩、徐变及开裂影响的组合梁长期受力性能研究(I)——试验及计算[J]. *土木工程学报*, 2009, 42(3): 8-15.
FAN Jian-sheng, NIE Jian-guo, WANG Hao. Long-term behavior of composite beams with shrinkage, creep and cracking (I)—experiment and calculation[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2009, 42(3): 8-15.
- [22] 樊健生, 聂鑫, 李全旺. 考虑收缩、徐变及开裂影响的组合梁长期受力性能研究(II)——理论分析[J]. *土木工程学报*, 2009, 42(3): 16-22.
FAN Jian-sheng, NIE Xin, LI Quan-wang. Long-term behavior of composite beams with shrinkage, creep and cracking (II)—theoretical analysis[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2009, 42(3): 16-22.
- [23] MARCELLO TARANTINO A, DEZI L. Creep effects in composite beams with flexible shear connectors[J]. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, 1992, 118(8): 2063-2080.
- [24] HE G H, LI X K. Weak-form quadrature element method for creep and shrinkage analysis of steel-concrete composite beams [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2020, 146 (4) : 04020015.
- [25] ZHU L, SU R K L, HUO J X, et al. Test of the long-term behavior of curved steel-concrete composite box beams: Case study [J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2021, 26(9): 05021009.
- [26] ERKMEN R E, BRADFORD M A. Time-dependent creep and shrinkage analysis of composite beams curved in-plan[J]. *Computers & Structures*, 2011, 89(1/2): 67-77.
- [27] MARTINELLI E. A general numerical model for simulating the long-term response of two-layer composite systems in partial interaction[J]. *Composite Structures*, 2021, 257: 112929.
- [28] MURAKAMI H. A laminated beam theory with interlayer slip [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1984, 51(3): 551-559.
- [29] RANZI G, ZONA A. A steel-concrete composite beam model with partial interaction including the shear deformability of the steel component[J]. *Engineering Structures*, 2007, 29(11): 3026-3041.
- [30] ZONA A, RANZI G. Finite element models for nonlinear analysis of steel-concrete composite beams with partial interaction in combined bending and shear[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2011, 47(2): 98-118.
- [31] AREIZA-HURTADO M, VEGA-POSADA C A, ARISTIZABAL-OCHOA J D. Stiffness matrix and loading vector of a two-layer Timoshenko composite beam [J]. *Structures*, 2019, 20: 20-32.
- [32] HJIAJ M, BATTINI J M, NGUYEN Q H. Large displacement analysis of shear deformable composite beams with interlayer slips [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, 47(8): 895-904.
- [33] NGUYEN Q H, HJIAJ M, LE GROGNEC P. Analytical approach for free vibration analysis of two-layer Timoshenko beams with interlayer slip[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(12): 2949-2961.
- [34] 李夏元, 王磊, 陈建兵, 等. 考虑腹板等效剪切变形影响的单箱多室薄壁箱梁单元[J]. *长安大学学报(自然科学版)*, 2026, 46(1): 118-128.
LI Xia-yuan, WANG Lei, CHEN Jian-bing, et al. Single-box multi-cell thin-walled box girder element considering equivalent shear deformation effect of webs [J]. *Journal of Chang’an University (Natural Science Edition)*, 2026, 46(1): 118-128.
- [35] LE GROGNEC P, NGUYEN Q H, HJIAJ M. Exact buckling solution for two-layer Timoshenko beams with interlayer slip [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, 49(1): 143-150.
- [36] NGUYEN Q H, HJIAJ M, UY B. Time-dependent analysis of composite beams with continuous shear connection based on a space-exact stiffness matrix [J]. *Engineering Structures*, 2010, 32(9): 2902-2911.
- [37] 吕朝锋, 杨庆卫, 陈伟球. 收缩与徐变对钢-混凝土组合梁弯曲变形的影响分析[J]. *建筑结构学报*, 2010, 31(7): 32-39.
LV Chao-feng, YANG Qing-wei, CHEN Wei-qiu. Effects of shrinkage and creep strains on bending behavior of steel-concrete composite beams[J]. *Journal of Building Structures*, 2010, 31(7): 32-39.
- [38] GILBERT R I, BRADFORD M A. Time-dependent behavior of continuous composite beams [R]. Sydney: University of New South Wales, 1992.